

Métodos para reconstrução automática de objectos fragmentados

António José Marques
FEUP, Universidade do Porto
Rua Dr. Roberto Frias s/n
4200-465 Porto, Portugal
ajm@ispgaya.pt

Resumo A reconstrução de objectos fragmentados é uma necessidade em âmbitos diversos. Áreas como as da arqueologia, investigação criminal e medicina legal, entre outras, têm abordado a resolução do problema com o auxílio de sistemas computacionais. Contudo, as soluções apresentadas revelam-se tipicamente orientadas à resolução de problemas específicos. Assim, a diversidade de métodos desenvolvidos parece contrastar com a dificuldade de determinação de um produto abrangente e capaz de gerar soluções de modo eficaz. No presente procurar-se-á atingir objectivos a três níveis. Numa primeira fase, tentar-se-á recolher trabalhos representativos de esforços para a resolução do problema. Numa segunda fase, serão seleccionados os que se considerem mais relevantes para análise. Após análise comparativa dos trabalhos seleccionados, tentar-se-á utilizar o conhecimento recolhido para a proposta de um método que permita abordar o problema de forma genérica e eficaz.

1 Introdução

O problema que se pretende analisar com o trabalho apresentado poderá ser genericamente descrito como o da reconstrução auxiliada por computador de objectos desconhecidos que foram quebrados ou rasgados, resultando num grande número de fragmentos irregulares. Para início de resolução do problema enunciado, deverá ser sempre obtida uma representação em formato digital dos fragmentos a considerar. Partindo dessa informação, deverá ser desenvolvido o tratamento adequado à determinação ou verificação das características do objecto original, assim como a posição e orientação de cada fragmento no mesmo. Durante o processo, terão de ser feitas todas as verificações necessárias à minimização da probabilidade de obtenção de falsas soluções. Se aparentemente o problema é de simples resolução, na prática, há um conjunto diverso de aspectos responsáveis pela complexidade que depois se verifica. Em particular:

- O espaço de pesquisa da localização de um dado fragmento no objecto original pode ter até 6 graus de liberdade. Repare-se que, no espaço 3D, a colocação de qualquer fragmento no objecto original poderá estar sujeita a translações em 3 eixos, tal como a rotação em torno de qualquer dos 3 eixos do sistema de referência.

- No caso de um documento rasgado ou de um objecto plano fragmentado, como um mosaico, apenas se verifica o desconhecimento de 3 destes valores. Respectivamente, dois associados ao deslocamento ao longo de um plano e um terceiro associado à rotação em torno de um eixo perpendicular ao mesmo.
- Quando se trate de um objecto de características puramente tridimensionais -como uma peça de escultura, todos os graus de liberdade terão de ser considerados para determinação da posição original relativamente aos restantes.
- As superfícies digitalizadas são frequentemente imprecisas e geradoras de ruído.
- Aspectos como rebarbas geradas no rasgar de papel ou tecidos e estilhaços demasiado pequenos para que possam ser considerados como fragmentos concretos são aspectos introdutores de ruído, por implicarem um ajuste impreciso dos fragmentos.
- Fragmentos pequenos que tenham sido realmente perdidos ou deformações provocadas por erosão ou exposição a factores físicos ou químicos como elevadas temperaturas, corrosão ou sujeição a esforços mecânicos, são outros aspectos responsáveis pela necessidade de tratamento do processo como algo inerentemente impreciso.
- A quantidade de informação a processar pode ser muito elevada, obrigando a enormes recursos computacionais para resolução do problema em tempo útil. Neste caso e em particular, a digitalização de fragmentos de objectos tridimensionais pode levar a situações do tipo descrito.
- Não existe, tipicamente, nenhum aspecto genérico que possa à partida ser utilizado para redução do âmbito de pesquisa de possíveis soluções.
- Com excepção de métodos que utilizem associação a bases de dados de objectos expectáveis com pormenores concretos que possam ser procurados nos fragmentos para determinação inicial de uma localização e posição aproximadas, verifica-se o condicionalismo referido.
- Existência de fragmentos com superfícies sem correspondência directa com outras superfícies.
- Necessidade de detecção de intersecção de superfícies num âmbito global, para eliminação de falsas soluções.
- Não só é frequente a indisponibilidade de todos os fragmentos de um objecto original, responsável por situações como a descrita, como podem ainda existir imiscuídos fragmentos de outros objectos.

O último caso, para além de frequente em alguns cenários como os arqueológicos, pode tornar ainda mais complexa a resolução do problema. Repare-se que, em qualquer dos casos, qualquer solução apresentada terá de contar para além da inexactidão intrínseca, com objectos incompletos ou fragmentos a descartar, indutores de soluções falsas.

2 Trabalho relacionado

Para início do desenvolvimento foram recolhidos vários trabalhos existentes. Foi possível constatar, desde logo, a grande quantidade de artigos publicados abor-

dando o assunto. Porém, esse conjunto de artigos surgiu associado a um relativamente restrito número de investigadores. Sendo cada grupo de investigação afecto tipicamente a um método, a divisão e afectação de trabalhos a grupos de análise foi algo simplificada.

2.1 Métodos baseados na análise e comparação directa de linhas superficiais de fractura

Um dos trabalhos mais representativos deste grupo é, certamente, o descrito em [1] e [2], entre outros. Neste caso, o problema é abordado como um problema clássico de reconstrução de um *puzzle* 2D. O princípio essencial baseia-se na comparação directa entre todas as peças, na tentativa de encontrar peças que, quando associadas, forneçam um encaixe de perfeição superior à definida num dado limiar. A comparação, contudo, é feita apenas através de uma linha limítrofe da superfície de fractura. Os princípios e requisitos enunciados para aplicação do método são:

- Os objectos a reconstruir têm uma superfície bem definida e relativamente plana.
- A superfície a reconstruir considera-se dividida em fragmentos ideais.
- Os fragmentos ideais são separados por linhas de fractura, sendo estas curvas irregulares de largura zero.
- Dois fragmentos consideram-se adjacentes, se partilharem parte de uma mesma linha de fractura.
- As fracturas dividem igualmente o contorno da superfície original do objecto em linhas de borda.

A solução consiste na determinação de um grafo de adjacências representativo da rede de fracturas.

A aplicação do método está sujeita a um conjunto de etapas devidamente definidas:

- Aquisição e separação das imagens dos fragmentos.
- Segmentação e extracção dos contornos.
- Filtragem dos contornos em várias escalas de resolução.
- Codificação dos contornos por sequências de valores de curvatura.
- Análise estatística dos contornos.
- Identificação de segmentos similares nas escalas mais grosseiras.
- Localização e refinamento dos pares similares em escalas mais finas.
- Alinhamento geométrico óptimo dos segmentos semelhantes.
- Apresentação gráfica dos resultados.

Pela análise dos princípios enunciados, é fácil verificar que o âmbito de aplicação do método é relativamente restrito. Por estar limitado à utilização em objectos de características planas, elimina imediatamente um grande conjunto de cenários de possível utilização. No entanto, este mostrou representar uma importante base científica para o desenvolvimento de trabalhos posteriores.

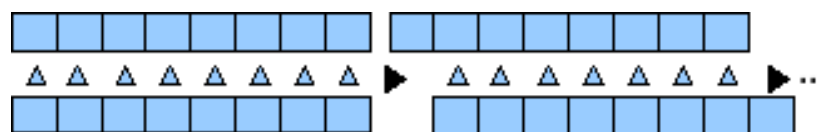


Figura 1. A aplicação do método implica um elevado número de operações de comparação. Para determinação de um possível encaixe adequado entre cada par de fragmentos sendo desconhecida a posição relativa de ambos, torna-se necessário testar todas as hipóteses simulando o deslize entre ambos. Para cada situação de deslocamento relativo é efectuada nova comparação de cada par de valores amostrados.

De facto, são inúmeros os trabalhos posteriores a citar o trabalho em questão. No âmbito da imunidade a ruído, este demonstrou ser igualmente um método especialmente vulnerável. Dependendo essencialmente da informação contida em detalhes submilimétricos de linhas de fractura superficiais, especialmente susceptíveis a imperfeições introduzidas pela criação de estilhaços e a deformações por erosão, o âmbito de utilização do método revela-se especialmente restrito. Repare-se que este aspecto assume relevância superior ainda na área da arqueologia, onde os fragmentos podem ficar longos períodos de tempo expostos a factores ambientais diversos e potenciadores de fenómenos de deformação por desgaste. A necessidade de intervenção humana é reduzida. Após a obtenção da representação em formato digital de cada fragmento, o sistema é completamente autónomo no processo de obtenção de possíveis soluções. A carga computacional envolvida, porém é elevada. Relembre-se que o método consiste na comparação sucessiva de cada par de fragmentos, por combinação dos mesmos entre si. Para comparação de cada par é necessário um conjunto de comparações da sucessão de valores de curvatura das linhas de fractura envolvidas, com desfasamentos progressivos entre as duas peças. A operação de comparação, em si, é igualmente complexa, por não se tratar de uma comparação exacta mas de uma tarefa de determinação de erros sucessivos e acumulados ao longo do processo. Embora a utilização de técnicas de programação dinâmica permita uma eliminação progressiva de não-candidatos em escalas de resolução inferior, menos exigentes em termos computacionais pela menor quantidade de informação processada, as operações de filtragem e determinação de novos contornos em graus de detalhe superior são exigentes. Para mais, o esforço necessário para a procura de soluções aumenta de forma acentuada com o número de fragmentos:

- O número total de comparações base entre pares de possíveis candidatos aumenta exponencialmente com o número de fragmentos.
- Quando o nível de fragmentação leve a fragmentos de dimensões reduzidas, a quantidade de informação contida nas linhas de fractura torna-se menor. Assim, o recurso à análise em níveis de pormenor superior torna-se mais frequente, fazendo aumentar as necessidades computacionais.

A possibilidade de geração de falsas soluções é controlada através do erro máximo admissível na comparação de linhas de fractura. Contudo, este valor

pode ser igualmente crítico. Se um valor excessivamente restritivo pode invalidar soluções verdadeiras pela existência de ruído, um valor demasiadamente permissivo poderá levar a falsas soluções. Pela inexistência de um mecanismo global de detecção de sobreposições, o problema surge ainda mais acentuado.

Outros trabalhos semelhantes minimizam os problemas do anterior pela introdução de mecanismos específicos. Em [3], é introduzida a detecção de sobreposição de partes dos fragmentos durante a tentativa de comparação, para eliminação precoce de falsos candidatos. Em [4], foi tentada a substituição da combinação de programação dinâmica e análise a níveis submilimétricos pela utilização de comparações em escala única. Como informação extra, foi introduzida a componente de cor em cada ponto amostrado para obtenção de valores de curvatura. Assim, dois factores actuam sempre em simultâneo: -a informação geométrica na linha de fractura e a de cor ao longo da mesma. Das últimas abordagens, contudo, não resultam avanços verdadeiramente significativos. No primeiro caso é possível obter uma maior eficiência do algoritmo, reduzindo o trabalho computacional. No segundo, a mesma vantagem é conseguida, mas à custa de um aspecto que torna o âmbito de utilização ainda mais restrito. De facto, quando aplicado a objectos cerâmicos de cor quase uniforme ou a objectos em que a coloração inicial esteja demasiado degradada, poder-se-á ainda prever um incremento de soluções falsas. Mantêm-se contudo a sensibilidade ao ruído e o reduzido âmbito de aplicação apenas a objectos de características essencialmente bidimensionais. É possível ainda encontrar, como extensão aos métodos



Figura 2. Um exemplo de uma falsa solução, obtida pela aplicação do método utilizado em [4]

apresentados, a adaptação dos mesmos princípios à reconstrução de objectos 3D. Em [5], pelo registo de valores de torção da linha de fractura, introduz-se a componente necessária à verificação de continuidade geométrica na junção de dois fragmentos em comparação. Adicionalmente, para verificação de validade das soluções, é introduzido um mecanismo de verificação global com possibilidade de *backtracking*. Esta nova funcionalidade pode evitar falsas soluções, podendo ser especialmente interessante para os casos em que haja imiscuidade de fragmentos pertencentes a objectos estranhos.

2.2 Métodos destinados à recuperação de objectos tridimensionais de características básicas conhecidas

O desconhecimento das características do objecto original é um dos aspectos que pode dificultar a obtenção de soluções simples. Quando se trabalha no espaço tridimensional, qualquer tentativa de posicionamento relativo de um fragmento fica sujeita aos seis graus de liberdade referidos na introdução. A forma mais simples de os restringir é, certamente, a de aplicação de regras emergentes de informação conhecida *a priori*. A esta abordagem prestam-se especialmente objectos de olaria recolhidos e estudados no âmbito da arqueologia. Por serem objectos obtidos por modelação sobre um prato rotativo, as normais à sua superfície intersectam sempre o eixo de rotação que lhes deu origem[6]. Assim, pelo alinhamento de todos os fragmentos recorrendo à sobreposição da projecção do eixo de rotação de cada um dos restantes, obtém-se um âmbito de trabalho limitado apenas a dois graus de liberdade [7].



Figura 3. Determinação do eixo de rotação original, por intersecção das normais à superfície

É possível encontrar diversas soluções publicadas utilizando o princípio enunciado. Os autores de [8] e [9] consideram que quando um objecto com as características consideradas se fragmenta, se geram tipicamente linhas de fractura que se cruzam em junções que poderão ser do tipo "T" ou "Y". A aceitação de

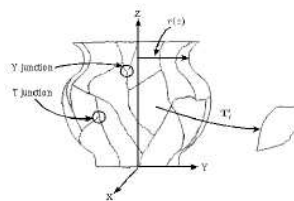


Figura 4. Características geométricas sempre consideradas e representação de junções do tipo "T" e "Y", segundo os autores de [8] e [9].

tal limitação é importante, porque possibilita a definição de pontos de início de

comparação entre linhas de fractura. Ao contrário do que sucedia nos métodos referidos na secção anterior, em que era obrigatório o teste de junção numa grande quantidade de posições relativas para cada par de fragmentos (fig.1), aqui, considera-se um posicionamento inicial previsto, reduzindo acentuadamente o número de comparações a efectuar. Ainda ao contrário do método apresentado em [2] em que era feita a análise sobre um enorme conjunto de pontos recolhidos numa escala submilimétrica, a quantidade de informação recolhida é diferente mas muito mais reduzida. Concretamente, é utilizado um conjunto de parâmetros onde figuram:

- Informação sobre a linha de fractura
- Posição relativa ao eixo de rotação
- Curva de perfil

O método utilizado para reconstrução do objecto prevê um início de processamento no qual se considera intervenção humana para identificação de vértices nas linhas de fractura. A caracterização de cada linha de fractura será efectuada com recurso a cinco pontos pertencentes à mesma linha, equidistantes entre si e partindo de cada vértice. É então o alinhamento dos cinco pontos que é testado para verificação da qualidade da junção entre dois candidatos. A aplicação do método prossegue com as acções de:

- Estimar o eixo original e a curva de perfil para cada fragmento.
- Para cada par de fragmentos, estimar todos os alinhamentos aceitáveis. Cada par formará uma *configuração*. Para cada *configuração* serão verificadas possíveis sobreposições, para eliminação de falsas soluções.
- Para cada configuração válida aperfeiçoar o alinhamento e estimar o eixo/curva de perfil para a nova situação. O objectivo do aperfeiçoamento é a maximização do parâmetro de estimativa máxima de similaridade (*Maximum Likelihood Estimation*). Na prática, tal significa a minimização da soma dos erros no acoplamento pelas linhas de fractura e de posicionamento face aos estimados no objecto original.
- O conjunto de configurações obtidas é registado numa tabela, juntamente com o custo associado (erro determinado face à situação ideal) a cada.
- Tenta-se então a associação de pares de configurações ou de associações a fragmentos.
- Repetem-se os últimos 4 passos até obtenção do objecto final.

Em [10] apresenta-se um outro método com diferenças relativamente ao anterior. O processo prevê a criação de *propostas*, consistindo estas em possíveis associações de fragmentos em que ambos tenham um vértice coincidente e um lado alinhado. É feita então uma classificação ordenada de cada *proposta*, sendo considerados 4 critérios:

- Alinhamento dos eixos de rotação de cada um.
- Sobreposição dos eixos. Numa situação ideal, deverão estar perfeitamente sobrepostos.

- Somatório do quadrado das distâncias entre pontos associados em cada linha de fractura.
- Alinhamento dos vectores tangentes à superfície em cada fragmento.

Em [6] e [7], para além das características puramente geométricas de alinhamento, a verificação e aperfeiçoamento das junções é conseguido pela aplicação do Algoritmo *Iterative Closest Point*¹.

2.3 Métodos baseados em associação de superfícies

Na procura de soluções para o problema da reconstrução de objectos fragmentados foi possível encontrar trabalhos que, não tendo sido desenvolvidos para o efeito, poderão apresentar métodos aplicáveis de forma eficaz. Notavelmente, em [11] e [12] é enunciado um método para associação de superfícies sem restrições. O método é descrito como capaz de estimar os parâmetros de transformação necessários para que seja minimizado o somatório das distâncias entre pontos contíguos de duas ou mais superfícies tridimensionais. Se se verificar a possibilidade de aplicação a um grande número de superfícies sem que a carga computacional se torne demasiadamente elevada e simultaneamente a capacidade para rejeição de tentativas de associação de superfícies não adjacentes no objecto original, então, deverá ser possível a sua aplicação para o ajuste de superfícies de fractura. Conseguir-se-á assim uma outra forma de recuperação de objectos fragmentados a partir dos seus fragmentos.

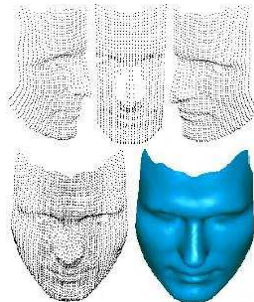


Figura 5. Exemplo de aplicação do método descrito. A partir da definição de 3 superfícies, o algoritmo tem a capacidade de identificar as partes comuns e aplicar a transformação que as maximize a sua aproximação.

Fast Random Sample Matching of 3d Fragments[13] é o nome de um artigo considerado que introduz um conceito diferente para a associação de superfícies.

¹ Dispondo de 2 conjuntos de pontos A e B representando duas superfícies, tais que A seja um subconjunto de B, ou *vice versa*, o algoritmo *ICP* procura pares de pontos mais próximos entre os dois, estimando a transformação que os alinhe. O processo continua iterativamente até à convergência máxima.

Ao invés de utilizar métodos de aproximação sucessiva como o *ICP* ou o *LS3D*, aplica uma variante do denominado *Random Sample Consensus (RANSAC)*. Os passos para aplicação do método completo surgem descritos como:

- Seleccionar aleatoriamente um ponto P_i da superfície de A e um ponto P_j da superfície de B . Um contacto de A e B fazendo coincidir P_i e P_j gera uma situação limitada a 3 graus de liberdade (rotação em torno dos 3 eixos). Dois outros graus de liberdade podem ser restringidos pela orientação das normais a cada superfície de contacto, respectivamente em P_i e P_j . Neste momento, o único grau de liberdade está associado à rotação em torno das normais.
- Seleccionar um segundo par de pontos capaz de definir, em conjunto com o anterior, uma proposta de junção adequada.
- Estimar a qualidade da junção.
- Repetir os passos anteriores memorizando o conjunto de pontos responsável pela geração da solução, até que um limite de qualidade seja atingido - resultando num sucesso, ou um determinado limite de tempo se esgote - resultando numa falha assumida.

3 Considerações adicionais

Pela análise dos métodos apresentados verifica-se novamente a dificuldade em tratar o problema da reconstrução de objectos fragmentados de uma forma genérica e eficaz. Os métodos apresentados em 2.1 estão limitados à utilização na recuperação de objectos com uma superfície plana. Este não é, indubitavelmente, o âmbito mais diverso de aplicação. Com tão grandes restrições à sua aplicação, contudo, seria de esperar uma grande eficácia. Na realidade, não é o que se observa. O método descrito em [1] e [2], pela profundidade da informação disponibilizada, expõe claramente a sua incapacidade para lidar com ruído. Sendo apresentado como candidato à utilização no âmbito da arqueologia - onde os fragmentos estiveram frequentemente expostos durante longos períodos de tempo a factores ambientais, tal aspecto é essencial. Mesmo em condições regulares como as consideradas nos testes apresentados, a sua capacidade para determinar grafos de adjacência completos - o objectivo máximo do método - ficou longe de ser demonstrada.

Os tempos de execução para determinação de cada solução - compreendendo cada cenário aproximadamente uma centena de fragmentos, estiveram sempre contidos na área dos vários milhares de segundos. Mesmo considerando alguma penalização por desactualização ou desadequação da plataforma computacional utilizada, a gama de valores parece estar acima do aceitável. Seria de esperar que a variante descrita em [4], por trabalhar com um volume de informação muito inferior, se mostrasse mais eficiente em termos de carga computacional. Contudo, mesmo considerando a utilização de uma plataforma modesta (de base *Intel PII/300*), são referidos pelo autor tempos entre 1 e 3 segundos para obtenção de soluções, para casos simples de duas peças. Relativamente ao método anterior, este mantém ainda as restrições restantes.

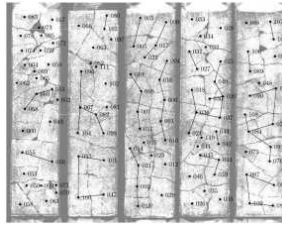


Figura 6. Resultado da aplicação do método à reconstrução de painéis cerâmicos fragmentados intencionalmente.

Os métodos baseados no conhecimento à priori de características geométricas do objecto original - na prática aplicáveis a objectos de olaria obtidos por modelagem sobre um prato rotativo, mostraram-se genericamente eficientes em vários aspectos:

- Imunidade a ruído.
- Capacidade de geração virtual de fragmentos indisponíveis.
- Capacidade de identificação de fragmentos estranhos ao objecto original - em especial, os pertencentes a objectos de características geométricas marcadamente diferentes.
- Baixa exigência em termos de recursos.
- A possibilidade de intervenção humana era considerada em [8], mas apenas de forma limitada e numa etapa inicial.

No entanto, a restrição de aplicação referida e comum a todos estes métodos torna-os aplicáveis, quase em exclusivo, a apenas um subconjunto dos casos do âmbito da arqueologia.

Os métodos direccionados à associação de superfícies não são de forma garantida solução para o problema. Mais difícil que determinar e alinhar as áreas comuns a 2 ou 3 superfícies, sabendo que elas existem, pode ser para estes métodos a identificação de falsos positivos. No cenário típico para o problema enunciado há dezenas ou centenas de fragmentos expondo uma enorme quantidade de superfícies, tais que só cada par específico pode gerar uma solução correcta. O método descrito em [13] parece capaz de lidar com o problema para uma pequena quantidade de fragmentos. Sê-lo-á para o caso oposto?

4 Conclusões

Esta não foi, ainda, uma análise exaustiva de todos os métodos aplicáveis. Dos muitos trabalhos e respectivas variantes encontradas e analisadas, foram seleccionados os que pareceram mais representativos. Contudo, este é um trabalho em curso, onde a orientação ideal para o objectivo final está ainda a ser aperfeiçoada. Durante o processo de recolha de informação, foram considerados numerosos trabalhos que sugeriram possíveis ideias alternativas. Numa primeira fase foi considerada a possibilidade de redução de linhas de fractura a sequências de valores

discretos invariáveis no espaço, para aplicação de algoritmos de *approximate string matching* - muito desenvolvidos ultimamente para a área da genética. Foi abandonada esta hipótese, pela previsível sensibilidade ao ruído que apresentariam as soluções. Considerou-se, então, a possibilidade de aplicação de algoritmos de verificação grosseira do ajuste de superfícies, associados a mecanismos de verificação global com capacidade de *backtracking*. Veio a verificar-se posteriormente que tal não consistia em novidade[5]. Uma terceira hipótese considerada foi a da redução das superfícies de junção, assumidamente irregulares, a *octrees*². A comparação de secções de *octrees* poderia ser eficiente em termos computacionais, mas estava condicionada a questões de posicionamento relativo³. Entre outras ideias, a reutilização de métodos utilizados na pesquisa rápida de informação com base em critérios geométricos foi igualmente pensada. Artigos como [14] foram analisados, mas rapidamente se verificou que o propósito era diferente do pretendido. Mais que encontrar e posicionar superfícies que idealmente seriam perfeitamente simétricas, estes métodos pretendem a localização rápida de elementos com características grosseiras comuns.

Sendo este - como antes referido - um trabalho em curso, não existem ainda conclusões finais. No entanto, pelos casos analisados,[13] parece apresentar a melhor abordagem para o atingir de um método que seja simultaneamente versátil no âmbito de aplicação, eficiente na utilização de recursos computacionais e capaz de gerar soluções interessantes.

Referências

1. da Gama Leitão, H.C.: Reconstrução automática de objetos fragmentados. PhD thesis (1999)
2. da Gama Leitão, H.C., Stolfi, J.: A multiscale method for the reassembly of two-dimensional fragmented objects. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell **24**(9) (2002) 1239–1251
3. Smet, P.D.: High-precision recomposition of fragmented 2-d objects. (2000)
4. Amigoni, F., Gazzani, S., Podico, S.: A method for reassembling fragments in image reconstruction. In: ICIP (3). (2003) 581–584
5. Kong, W., Kimia, B.B.: On solving 2D and 3D puzzles using curve matching. In: Proc. of CVPR, Hawaii, USA, IEEE, Computer Society (2001)
6. Kampel, M., Sablatnig, R.: Virtual reconstruction of broken and unbroken pottery. In: 3DIM. (2003) 318–325
7. Kampel, M., Sablatnig, R.: On 3d mosaicing of rotationally symmetric ceramic fragments. In J., K., M., P., M., N., eds.: Proc. of 17th International Conference on Pattern Recognition, Cambridge, UK. Volume 2., IEEE Computer Society (2004) 265–268
8. Cooper, D.B., Willis, A., Andrews, S., Baker, J., Cao, Y., Han, D., Kang, K., Kong, W., Leymarie, F.F., Orriols, X., Velipasalar, S., Vote, E.L., Joukowsky, M.S., Kimia, B.B., Laidlaw, D.H., Mumford, D.: Assembling virtual pots from 3d

² As *octrees* constituem um método de representação de volumes, por decomposição espacial recursiva em octantes.

³ Em [12] é utilizado um processo do mesmo tipo para optimização do método *LS3D*

- measurements of their fragments. In: VAST '01: Proceedings of the 2001 conference on Virtual reality, archeology, and cultural heritage, New York, NY, USA, ACM Press (2001) 241–254
9. Cooper, D.B., Willis, A., Andrews, S., Baker, J., Cao, Y., Han, D., Kang, K., Kong, W., Leymarie, F.F., Orriols, X., Velipasalar, S., Vote, E.L., Joukowsky, M.S., Kimia, B.B., Laidlaw, D.H., Mumford, D.: Bayesian pot-assembly from fragments as problems in perceptual-grouping and geometric-learning. In: ICPR '02: Proceedings of the 16 th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02) Volume 3, Washington, DC, USA, IEEE Computer Society (2002) 30297
 10. Andrews, S., Laidlaw, D.H.: Toward a framework for assembling broken pottery vessels. In: Eighteenth national conference on Artificial intelligence, Menlo Park, CA, USA, American Association for Artificial Intelligence (2002) 945–946
 11. Gruen, A., Akca, D.: Least squares 3d surface and curve matching. *PandRS* **59**(3) (2005) 151–174
 12. Gruen, A., Akça, D.: Fast correspondence search for 3d surface matching. In: Workshop Laser Scanning 2005, Enschede, Netherlands. (2005)
 13. Winkelbach, S., Rilk, M., Schonfelder, C., Wahl, F.: Fast random sample matching of 3d fragments. (2004) 129–136
 14. Sundar, H., Silver, D., Gagvani, N., Dickinson, S.: Skeleton based shape matching and retrieval (2003)