Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Mendes Moreira
João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

6ª Aula Prática – Numeração de Programas URM

6.1. Resolução

$$
\begin{aligned}
\beta(J(3,4,2)) &= 4\text{x}\zeta(3,4,2)+3 &&= 4\text{x}\pi(\pi(3-1,4-1),2-1)+3\\
&= 4\text{x}\pi(\pi(2,3),1)+3 &&= 4\text{x}\pi(2^2\text{x}(2\text{x}3+1)-1,1)+3\\
&= 4\text{x}\pi(27,1)+3 &&= 4\text{x}[2^{27}\text{x}(2\text{x}1+1)-1]+3\\
&= 1610612735
\end{aligned}
$$

6.2. Resolução

O código $503=4\text{x}125+3$ $(=4\text{x}n+s)$. Dado que $s=3$, $\beta^{-1}(503)$ corresponde a uma instrução $J(m,n,q)$, tal que $\zeta(m,n,q)=125$.

Mas $\zeta(m,n,q) = 125 = \pi(\pi(m-1,n-1),q-1)$.

Seja $r=\pi(m-1,n-1)$; então:

$2^r\text{x}[2\text{x}(q-1)+1]-1 =125$; donde: $r=1$ e $q=32$.

$2^{m-1}\text{x}[2\text{x}(n-1)+1]-1 =1$; donde: $m=2$ e $n=1$.

Logo teremos que: $\beta^{-1}(503) = J(2,1,32)$.

Nota: $\pi(\pi(m-1,n-1),q-1)=125$ pode-se resolver em ordem a m, n e q da seguinte forma:
Sendo $r=\pi(m-1,n-1)$, então $\pi(r,q-1)=125$ ou $\pi^{-1}(125)=(r,q-1)$.
Como $r=\pi_1(125)=(125+1)_1$, ou seja, r é o número de vezes que 2 entra na factorização em números primos do número $125+1=126$.
Mas: $126 = \underline{2}\text{x}3\text{x}3\text{x}7$, e então: $r=\pi_1(125)=1$.
Sabendo que $\pi(1,q-1)=125$, pode-se obter o valor de q.
Assim: $2^1\text{x}[2\text{x}(q-1)+1]-1=125$, ou: $2\text{x}(q-1)+1=63$, donde: $q=32$.
Como $r=\pi(m-1,n-1)=1$, então $m-1=\pi_1(1)=(1+1)_1=1$, donde: $m=2$.
Assim, $2^1\text{x}[2\text{x}(n-1)+1]-1=1$, ou: $2\text{x}(n-1)+1=1$, donde: $n=1$.

6.3. Resolução

$\gamma(P) = 2^{\beta(I_1)} + 2^{\beta(I_1)+\beta(I_2)+1} + 2^{\beta(I_1)+\beta(I_2)+\beta(I_3)+2} - 1.$

$\beta(I_1) = 4x\pi(3-1,4-1)+2 = 4x[2^2x(2x3+1)-1]+2 = 110.$

$\beta(I_2) = 4x(3-1)+1 = 9.$

$\beta(I_3) = 4x(1-1)+0 = 0.$

$\gamma(P) = 2^{110} + 2^{110+9+1} + 2^{110+9+0+2} - 1 = 2^{110} + 2^{120} + 2^{121} - 1.$

6.4. Resolução

$100 = 2^0+2^2+2^5+2^6-1.$

$\beta(I_1)=0=4x0+0,$

de onde: $I_1=Z(1).$

$\beta(I_1)+\beta(I_2)+1=2$, ou seja: $\beta(I_2)=2-0-1=1=4x0+1,$

de onde: $I_2=S(1).$

$\beta(I_1)+\beta(I_2)+\beta(I_3)+2=5$, ou seja: $\beta(I_3)=5-0-1-2=2=4x0+2,$

de onde: $I_3=T(1,1).$

$\beta(I_1)+\beta(I_2)+\beta(I_3)+\beta(I_4)+3=6$, ou seja: $\beta(I_4)=6-0-1-2-3=0=4x0+0,$

de onde: $I_4=Z(1).$

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

7ª Aula Prática – Método da Diagonal

7.1. Resolução

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \le m. \\ \phi_{x-m-1}(x)+1 & \text{se } x > m \wedge \phi_{x-m-1}(x) \text{ está definido.} \\ 0 & \text{se } x > m \wedge \phi_{x-m-1}(x) \text{ não está definido.} \end{cases}$$

Usando o método da diagonal, garante-se por construção que a função $g(x)$ é diferente de qualquer função computável ϕ_i em pelo menos um ponto. De facto, qualquer função ϕ_i é diferente de g pelo menos no ponto $i+m+1$.

Supondo que g é computável, então $g=\phi_i$, para algum valor i. Então, sabendo que $\forall i, i+m+1>m$ e usando a definição de g,

$$g(i+m+1) = \phi_i(i+m+1) = \begin{cases} \phi_i(i+m+1)+1 & \text{se } \phi_i(i+m+1) \text{ está definido.} \\ 0 & \text{se } \phi_i(i+m+1) \text{ não está definido.} \end{cases}$$

Mas esta definição é claramente absurda, $\forall i$. Logo, g não é computável.

7.2. Resolução

Seja a função $g(x)$ definida de seguida, com $qt(y,x)$ sendo o quociente da divisão inteira de x por y.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se 'x é par'.} \\ \phi_{\mathrm{qt}(2,x)}(x)+1 & \text{se 'x é ímpar'} \wedge \phi_{\mathrm{qt}(2,x)}(\mathrm{x}) \text{ está definido.} \\ 0 & \text{se 'x é ímpar'} \wedge \phi_{\mathrm{qt}(2,x)}(\mathrm{x}) \text{ não está definido.} \end{cases}$$

Admitindo por hipótese que g é computável, então $\exists m \in N$: $g=\phi_m$.

Sabendo que $2m+1$ é ímpar, $\forall m$, pode-se provar que $g(2m+1) \neq \phi_m(2m+1)$, $\forall m$.

$$g(2m+1) = \phi_m(2m+1) = \begin{cases} \phi_m(2m+1)+1 & \text{se } \phi_m(2m+1) \text{ está definido.} \\ 0 & \text{se } \phi_m(2m+1) \text{ não está definido.} \end{cases}$$

O que é absurdo, para qualquer m. Logo, g não é computável.

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

8ª Aula Prática – Teorema s-m-n

8.1. Resolução

Podemos definir uma função binária *g* (em *n* e *x*) da seguinte forma:

$$g(n,x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se } x \text{ é uma potência perfeita de ordem } n, \\ \text{indefinido} & \text{se } x \text{ não é uma potência perfeita de ordem } n. \end{cases}$$

Usando a forma simples do teorema s-m-n basta mostrar que $g(n,x)$ é computável, através de um programa G, para saber que existe uma função computável total $k(x)$ tal que $g(n,x) = \phi_{k(n)}(x)$. Se tal se verificar, $k(n)$ é um índice da função *f* para cada *n*.

Como também podemos definir a função *g* da forma seguinte, $g(n,x) = \mu y(|x - y^n| = 0)$, então basta mostrar que $|x - y^n|$ é computável, para provar que *g* também é computável (pelo teorema da minimização).

Caso a multiplicação seja computável y^n também o é pelo teorema da recursão, pois $y^0=1$ e $y^{n+1} = yy^n$. Note-se que a função 1 é computável a partir das funções básicas 0 e sucessor, e que xy é computável, caso a adição o seja, pois $x0=0$ e $x(y+1)=xy+x$ (0 é computável por ser uma função básica). Como $x+0=x$ e $x+(y+1)=(x+y)+1$ então $x+y$ é computável pelo teorema da recursão e porque a função sucessor é uma função básica. Assim, está provado que y^n é computável.

Falta provar que $|x-y|$ é computável pois caso o seja, também $|x-y^n|$ o é pelo teorema da substituição. Como se sabe, $|x-y|=(x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$. Como já se provou que $x+y$ é computável, basta provar que $(x \dot{-} y)$ é computável pois, caso o seja, $|x-y|$ também o é pelo teorema da substituição. Para provar que $x \dot{-} y$ é computável basta provar que $x \dot{-} 1$ também o é, pois nesse caso, $x \dot{-} y$ também o será, já que se define por recursão através de $x \dot{-} 0 = x$ e $x \dot{-} (y+1)=(x \dot{-} y) \dot{-} 1$. Como $x \dot{-} 1$ é definida por $0 \dot{-} 1=0$ e $(x+1) \dot{-} 1=x$, então é computável pelo teorema da recursão e porque a função 0 é uma função básica.

Está assim demonstrado que g é computável e, pela forma simples do teorema s-m-n, existe então uma função computável total k tal que $k(n)$ é um índice da função unária $f(x)$ definida, para cada n.

8.2. Resolução

Seja $g(n,x) = \mu y(|x - y^n| = 0)$. A função g está definida para valores de x que são exactamente as potências perfeitas de n. Ou seja, o domínio de $g(n,x)$, para cada n, coincide com $W_{k(n)}$.

Como g é computável (ver exercício anterior), então, pela forma simples do teorema s-m-n, existe uma função computável total k tal que $k(n)$ é o índice e da seguinte função ϕ unária: $\phi_e(x)=g(n,x)$. Ou seja, $\phi_{k(n)}(x)=g(n,x)$. Mas por definição W_e=Dom(ϕ_e), ou seja $W_{k(n)}$=Dom($\phi_{k(n)}$), ou $W_{k(n)}$=Dom($g(n,x)$). Está assim demonstrada a existência de uma função computável total k.

8.3. Resolução

Por definição, $W_{s(x)}^{(n)}$ é o domínio da função $\phi_{s(x)}^{(n)}$.

Para melhor compreender o problema, vamos ver alguns casos particulares.

Seja $n=2$:

$$W_{s(x)}^{(2)} = \{(y_1, y_2): y_1+y_2=x\}$$

Seja $n=2$ e $x=3$:

$$\begin{aligned} W_{s(3)}^{(2)} &= \{(y_1, y_2): y_1+y_2=3\} \\ &= \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \end{aligned}$$

Seja $n=2$ e $x=4$:

$$\begin{aligned} W_{s(4)}^{(2)} &= \{(y_1, y_2): y_1+y_2=4\} \\ &= \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 2), (4, 0)\} \end{aligned}$$

À semelhança do exemplo 4.2.2 do capítulo 4 [Cutland 1980], temos de procurar definir uma função computável f que esteja definida se e só se (sse) $y_1+y_2+\ldots+y_n=x$. Para tal vamos por exemplo recorrer a minimização, da forma seguinte:

$$f(x, y_1,y_2, \ldots,y_n)=\mu z\,[\,|(y_1+y_2+\ldots+y_n)-x| + z=0\,]$$

A função f é claramente computável (por substituição, recursão e minimização a partir das funções básicas). Então podemos afirmar que existe um programa F que a implementa, programa esse que tem um número de Gödel e, ou seja F=P$_e$. A função f claramente está definida sse $y_1+y_2+\ldots+y_n=x$.

$$f(x, y_1,y_2, \ldots,y_n)=\begin{cases} 0 & \text{se } (y_1+y_2+\ldots+y_n)=x, \\ \text{indefinido} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam por exemplo com $n=2$ e $x=4$ os seguintes valores de f:

$$\begin{aligned} f(4, 1, 3) &= \mu z\,[\,|(1+3)-4| + z=0\,] \\ &= \mu z\,[\,z=0\,] \end{aligned}$$

$= 0.$

$f(4, 1, 5) \quad = \mu z\ [\ |(1+5)-4| + z=0\ ]$

$= \mu z\ [\ 1 + z=0\ ]$

$= indefinido.$

$f(4, 1, 2) \quad = \mu z\ [\ |(1+2)-4| + z=0\ ]$

$= \mu z\ [\ 1 + z=0\ ]$

$= indefinido.$

Mas então, dado o exemplo F=P_e anterior: $f(x, y_1,y_2, ...,y_n) = \phi_e^{(n+1)}(x, y_1,y_2, ...,y_n)$. Aplicando o teorema s-m-n, concluímos que existe uma função computável *s* tal que:

$$f(x, y_1,y_2, ...,y_n) = \phi_e^{(n+1)}(x, y_1,y_2, ...,y_n)= \phi_{s(e,x)}^{(n)}(y_1,y_2, ...,y_n).$$

No caso de termos fixado um dado programa P_e para a função *f*, e considerando a versão simples do teorema s-m-n, poderiamos concluir que:

$$f(x, y_1,y_2, ...,y_n) = \phi_e^{(n+1)}(x, y_1,y_2, ...,y_n)= \phi_{s(x)}^{(n)}(y_1,y_2, ...,y_n).$$

Ou seja, existe a função *s(x)* computável que indexa todos os domínios $W^{(n)}$, uma vez que $W_{s(x)}^{(n)}$ é por definição o domínio da função $\phi_{s(x)}^{(n)}$.

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

9ª Aula Prática – Não Decidibilidade de Problemas

9.1. Resolução

'$\phi_x(x) = 0$' não é decidível.

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in W_x, \\ \text{indefinido} & \text{se } x \notin W_x. \end{cases}$$

Mas $f(x,y)=\mathbf{0}\,\psi_U(x,x)$ é computável, dado que a função zero, a função universal e a função multiplicação são computáveis. Então, pelo teorema s-m-n, existe uma função computável total k, tal que: $f(x,y)= \phi_{k(x)}(y)$.

Mas então verificam-se as seguintes equivalências:

$$\phi_{k(x)}(k(x))=0 \Leftrightarrow f(x,k(x))=0 \Leftrightarrow x \in W_x$$

Seja g a função característica de '$\phi_x(x)=0$':

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_x(x) = 0, \\ 0 & \text{se } \phi_x(x) \neq 0. \end{cases}$$

Seja $h(x)=g(k(x))$. Então:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_{k(x)}(k(x)) = 0 \text{ (isto é, } x \in W_x), \\ 0 & \text{se } \phi_{k(x)}(k(x)) \neq 0 \text{ (isto é, } x \notin W_x). \end{cases}$$

Como se sabe, '$x \in W_x$' não é decidível (cf. teorema 1.1, [Cutland 1980], p. 101). Então a função h não é computável e, assim sendo, g também não é computável. Logo, '$\phi_x(x)=0$' não é decidível.

'$W_x = \emptyset$' não é decidível.

Seja:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in W_x,\\ \text{indefinido} & \text{se } x\notin W_x.\end{cases}$$

Mas $f(x,y)=\mathbf{0}\,\psi_U(x,x)$ é computável, dado que a função zero, a função universal e a função multiplicação são computáveis. Então, pelo teorema s-m-n, existe uma função computável total k, tal que: $f(x,y)=\phi_{k(x)}(y)$.

Pode-se ainda dizer que '$W_{k(x)}\neq\varnothing$' $\Leftrightarrow$ '$x\in W_x$', pela definição de f, como se mostra de seguida:

$$x\in W_x \Rightarrow f(x,y)=0,\ \forall y \Rightarrow \phi_{k(x)}(y)=0,\ \forall y\ (s\text{-}m\text{-}n) \Rightarrow W_{k(x)}=N\ (N\neq\varnothing)$$

$$W_{k(x)}\neq\varnothing \Rightarrow \exists y\text{: } \phi_{k(x)}(y)=0 \Rightarrow \exists y\text{: } f(x,y)=0 \Rightarrow x\in W_x$$

(Será correcto dizer que '$W_x\neq\varnothing$' $\Leftrightarrow$ '$x\in W_x$' ?).

Seja g a função característica de '$W_x\neq\varnothing$':

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } W_x(x)=\varnothing,\\ 0 & \text{se } W_x(x)\neq\varnothing.\end{cases}$$

Seja $h(x)=g(k(x))$. Então:

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{se } W_{k(x)}=\varnothing \text{ (isto é, } x\notin W_x),\\ 0 & \text{se } W_{k(x)}\neq\varnothing \text{ (isto é, } x\in W_x).\end{cases}$$

Como o predicado '$x\in W_x$' não é decidível, então a sua função característica não é computável, logo h também não é computável (**nota**: sendo $c(x)$ a função característica de '$x\in W_x$' então $c(x)=\overline{\text{sg}}\,(h(x))$. Se $h(x)$ for computável então $c(x)$ também o é pelo teorema da sabstituição e porque $\overline{\text{sg}}$ também é computável (porquê?). Como $c(x)$ não é computável então $h(x)$ também não é).

Como a função h não é computável então g também não é computável e logo '$Wx=\varnothing$' não é decidível.

<u>'$x\in E_x$' não é decidível.</u>

Seja:

$$f(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } x\in W_x,\\ \text{indefinido} & \text{se } x\notin W_x.\end{cases}$$

Mas $f(x,y)$ é computável pois $f(x,y)=s(0(\phi_x(x)))\times U_1^2(x,y)$ (justifique). Então, pelo teorema s-m-n, existe uma função computável total k, tal que: $f(x,y)=\phi_{k(x)}(y)$.

$$k(x)\in E_{k(x)} \Leftrightarrow k(x)\in Ran(f) \Leftrightarrow k(x)\in W_{k(x)}$$

Seja g a função característica de '$x\in E_x$':

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{se x} \in E_x,\\ 0 & \text{se x} \notin E_x.\end{cases}$$

Seja $h(x)=g(k(x))$. Então:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k(x) \in E_{k(x)} \text{ (isto é, } k(x) \in W_{k(x)}\text{)}, \\ 0 & \text{se } k(x) \notin E_{k(x)} \text{ (isto é, } k(x) \notin W_{k(x)}\text{)}. \end{cases}$$

Como se sabe por teorema que '$x \in W_x$' não é decidível, então o predicado '$k(x) \in W_{k(x)}$' também não é decidível. Note que sendo *k(x)* uma função total e computável (por teorema) e fazendo y=k(x), '$k(x) \in W_{k(x)}$'$\Leftrightarrow$'$y \in W_y$'. Tem-se assim que a função *h* não é computável e, assim sendo, *g* também não é computável. Logo, '$x \in E_x$' não é decidível.

Nota sobre o método de prova: Mostrar que um dado predicado não é decidível usando o teorema s-m-n, consiste num primeiro passo em criar uma equivalência entre o predicado dado e '$x \in W_x$' que se provou não ser decidível. Define-se e prova-se assim em primeiro lugar uma equivalência entre '$x \in W_x$' e o predicado dado, substituindo neste último *x* por *k(x)*. Note-se que é isso que faz a função *f(x,y)* em cada um dos exercícios anteriores. A função *f* sendo computável permite definir a equivalência atrás referida, recorrendo para tal à forma simples do teorema s-m-n. O segundo passo da demonstração consiste em definir a função característica do predicado dado (atrás designada por *g(x)*) e mostrar que *h(x)=g(k(x))* é a função característica de '$x \in W_x$' usando a equivalência anteriormente demonstrada. Prova-se desta forma que *h(x)* não é computável, logo que *g(x)* não é computável, logo que o predicado dado não é decidível.

9.2. Resolução (esboçada)

$f(y) = |\phi_x(y) - g(y)|$.

$\phi_x = g \Leftrightarrow f = 0$ (ou seja, $\phi_x(y) = g(y)$ sse $f(y)=0$).

Como |x-y| é computável(ver 2º exercício da aula nº 4) f também é computável porque ϕ_x e g são computáveis (a primeira por definição e a segunda pelo enunciado) e pelo teorema da substituição. Logo $\exists m: f=\phi_m$.

Como $\phi_m = 0$ não é decidível $\phi_x=g$ também não é.

9.3. Resolução (esboçada)

Sejam as funções *f* e *g*:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E_x, \\ 0 & \text{se } x \notin E_x. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } f(x) = 0, \\ 0 & \text{se } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

Se f(x) é computável g(x) também é pois $g(x)=\mu z<x(|f(x)-(z+1)|=0)$. Provando que |f(x)-(z+1)| é uma função computável total está provado que g(x) é computável pelo teorema da minimização limitada. Facilmente se demonstra que |f(x)-(z+1)| é computável caso f(x) seja computável (fica como exercício).

Assim, provando que g(x) não é computável, fica provado que f(x) também não é computável.

Partindo da hipótese teórica que g(x) é computável, então $\exists m \neq 0$: $g(x)=\phi_m(x)$.

No ponto m, g(m)=m ou g(m)=0.

Seja $g(m)=m \Rightarrow f(m)=0 \Rightarrow m \notin E_m$ (absurdo)

Seja $g(m)=0 \Rightarrow f(m)=1 \Rightarrow m \in E_m \Rightarrow g(m)= m \neq 0$ (absurdo)

Assim, g(x) não é computável (por redução ao absurdo) e, por consequência, f(x) também não é.