Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

1ª Aula Prática – Implementação de Funções Simples na Máquina URM

1.1. Resolução

R1	R2	R3	…
x	y	0	…

```
I1  J(1,3,6)
I2  J(2,3,5)
I3  S(3)
I4  J(1,1,1)
I5  S(4)
I6  T(4,1)
```

1.2. Resolução

R1	R2	…
x	0	…

```
I1  S(2)
I2  S(2)
I3  S(2)
I4  S(3)
I5  J(1,2,7)
I6  J(1,1,1)
I7  T(3,1)
```

1.3. Resolução

R1	R2	…
x	0	…

```
I1   T(1,3)
I2   J(2,3,6)
I3   S(1)
I4   S(2)
I5   J(1,1,2)
I6   Z(2)
I7   Z(3)
I8   J(1,2,16)
I9   S(2)
I10  J(1,2,16)
I11  S(2)
I12  J(1,2,16)
I13  S(2)
I14  S(3)
I15  J(1,1,8)
I16  T(3,1)
```

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

2ª Aula Prática – Implementação de Funções Recursivas na Máquina URM

2.1. Resolução

A função indicada é a função constante que retorna o valor *1* para qualquer argumento natural. Esta função pode assim ser definida, a partir das funções básicas zero $\mathbf{0}$ e sucessor $\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}(x)$ ou $x+1$), recorrendo ao método de substituição, como:

$\mathbf{1}(x)=\mathbf{s}(\mathbf{0}(x))$ ou

$\mathbf{1}(x)=\mathbf{0}(x)+1$

Neste caso, as funções gerais f e g_1, $\ldots g_k$, referidas pelo teorema 3.1 (cf. [Cutland 1980], p. 29) são as seguintes, dado que $k=1$ e $n=1$:

$f(y)= \mathbf{s}(y)$

$g_1(x)= \mathbf{0}(x)$.

2.2. Resolução

O predicado M é decidível se a sua função característica c_M for computável:

$$c_M(x,y)=\begin{cases}1 \text{ se } M(x,y) \text{ se verifica, isto é se } g(x)=y\\ 0 \text{ no caso contrário, isto é se } g(x)\neq y.\end{cases}$$

Considere-se a seguinte função computável (cf. [Cutland 1980] §3.3, exercício 1-c, p. 21):

$$f(a,b)=\begin{cases}1 \text{ se } a=b\\ 0 \text{ se } a\neq b.\end{cases}$$

Assim sendo, podemos definir $M(x,y)=f(g(x),y)$, por substituição, a partir de funções computáveis f e g.

2.3. Resolução

$X(x,0) = f(x) = 0$

$X(x,y+1) = g(x,y,X(x,y)) = x + X(x,y)$

$m = max(n+2, \rho(F), \rho(G)) = max(1+2, 1, 3) = 3$

$t = m+n = 3+1 = 4$

Multiplicação		**Forma genérica**	
`I1`	`T(1,4)`		`T(1,m+1)...T(n,m+n)`
`I2`	`T(2,5)`		`T(n+1,m+n+1)`
`I3`	`Z(1)`		`F[1,2,...,n -> t+3]`
`I4`	`T(1,7)`		
`I5`	`J(6,5,18)`	`I`**`q`**	`J(t+2,t+1,`**`p`**`)`
`I6`	`T(4,1)`		`G[m+1,...,m+n,t+2,t+3 -> t+3]`
`I7`	`T(6,2)`		
`I8`	`T(7,3)`		
`I9`	`Z(2)`		…
`I10`	`J(1,2,14)`		
`I11`	`S(2)`		
`I12`	`S(3)`		
`I13`	`J(1,1,10)`		
`I14`	`T(3,1)`		
`I15`	`T(1,7)`		
`I16`	`S(6)`		`S(t+2)`
`I17`	`J(1,1,5)`		`J(1,1,`**`q`**`)`
`I18`	`T(7,1)`	`I`**`p`**	`T(t+3,1)`

2.4. Resolução

$\hat{}(x,0) = f(x) = 1$

$\hat{}(x,y+1) = g(x,y,\hat{}(x,y)) = x * \hat{}(x,y)$

$m = max(n+2, \rho(F), \rho(G)) = max(1+2, 1, 5) = 5$

$t = m+n = 5+1 = 6$

Potência		**Forma genérica**
`I1  T(1,6)`		`T(1,m+1)...T(n,m+n)`
`I2  T(2,7)`		`T(n+1,m+n+1)`
`I3  Z(1)`		`F[1,2,...,n->t+3]`
`I4  S(1)`		
`I5  T(1,9)`		
`I6  J(8,7,25)`	I**q**	`J(t+2,t+1,`**p**`)`
`I7  T(6,1)`		`G[m+1,...,m+n,t+2,t+3 -> t+3]`
`I8  T(8,2)`		
`I9  T(9,3)`		
`I10 Z(4)`		
`I11 Z(5)`		
`I12 Z(2)`		
`I13 J(1,2,21)`		
`I14 Z(4)`		
`I15 J(3,4,19)`		…
`I16 S(5)`		
`I17 S(4)`		
`I18 J(1,1,15)`		
`I19 S(2)`		
`I20 J(1,1,13)`		
`I21 T(5,1)`		
`I22 T(1,9)`		
`I23 S(8)`		`S(t+2)`
`I24 J(1,1,6)`		`J(1,1,`**q**`)`
`I25 T(9,1)`	I**p**	`T(t+3,1)`

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

3ª Aula Prática – Implementação de Funções definidas com Minimização na Máquina URM

3.1. Resolução

raíz_quadrada$(x) = \mu y(x\text{-}y^2=0)$

$m = max(n+1, \rho(F)) = max(1+1,5) = 5$

Raíz quadrada	**Forma genérica**
I1 T(1,6)	T(1,m+1)...T(n,m+n)
I2 T(6,1)	Iq F[m+1,...,m+n,m+n+1 -> 1]
I3 T(7,2)	
I4 Z(3)	
I5 Z(4)	
I6 Z(5)	
I7 J(2,4,15)	
I8 J(2,3,12)	
I9 S(3)	
I10 S(5)	
I11 J(1,1,8)	
I12 Z(3)	
I13 S(4)	
I14 J(1,1,7)	…
I15 T(5,2)	
I16 Z(3)	
I17 J(1,2,21)	
I18 S(2)	
I19 S(3)	
I20 J(1,1,17)	
I21 T(3,1)	
I22 J(1,8,25)	J(1,m+n+2,p)
I23 S(7)	S(m+n+1)
I24 J(1,1,2)	J(1,1,q)
I25 T(7,1)	Ip T(m+n+1,1)

3.2. Resolução

$$quociente(x_1,x_2) = \mu y(x_1 - x_2 * y = 0)$$

$$m = max(n+1, \rho(F)) = max(2+1,6) = 6$$

Quociente **Forma genérica**

```
I1  T(1,7)                T(1,m+1)
I2  T(2,8)                T(n,m+n)
I3  T(7,1)             Iq F[m+1,...,m+n,m+n+1 -> 1]
I4  T(8,2)
I5  T(9,3)
I6  Z(4)
I7  Z(5)
I8  Z(6)
I9  J(2,4,17)
I10 J(3,5,14)
I11 S(5)
I12 S(6)
I13 J(1,1,10)             …
I14 Z(5)
I15 S(4)
I16 J(1,1,9)
I17 Z(2)
I18 J(1,6,22)
I19 S(2)
I20 S(6)
I21 J(1,1,18)
I22 T(2,1)
I23 J(1,10,26)            J(1,m+n+2,p)
I24 S(9)                  S(m+n+1)
I25 J(1,1,3)              J(1,1,q)
I26 T(9,1)             Ip T(m+n+1,1)
```

João Mendes Moreira

João Falcão e Cunha

Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

4ª Aula Prática – Programas e Funções

4.1. Resolução

Como $x^3 = x*x^2$, se provar que $x*y$ é computável x^3 também o será, por substituição.

Sabendo que $x*0 = 0$ e que $x*(y+1) = (x*y)+x$, tenho que $x*y$ é computável por recursão, sendo ainda necessário provar-se que $x+y$ é computável e notando-se que $x*0=0$ é computável pela função básica $0(x)$.

Como $x+0 = x$ e $x+(y+1) = (x+y)+1$ então $x+y$ é computável por recursão, pois a função básica $x+1$ é computável.

4.2. Resolução

Sabendo que x^2 é computável (dado do enunciado), basta provar que $|x-y|$ também o é. Assim, pelo teorema da substituição $(|x-y|)^2$ também será computável.

Como $|x-y|=(x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$ e como $x+y$ é computável (pois $x+0=x$ e $x+(y+1)=(x+y)+1$, logo $x+y$ é computável por recursão e pelo facto das funções básicas serem computáveis, nomeadamente a função sucessor), bastará provar que $x \dot{-} y$ é computável para se concluir que $|x-y|$ também o é pelo teorema da substituição.

Para provar que $x \dot{-} y$ é computável basta provar que $x \dot{-} 1$ também o é, pois caso o seja, $x \dot{-} y$ também o será, já que é definida por recursão através de $x \dot{-} 0=x$ e $x \dot{-} (y+1)=(x \dot{-} y) \dot{-} 1$.

Como $x \dot{-} 1$ é definida por $0 \dot{-} 1 = 0$ e $(x+1) \dot{-} 1 = x$ então é computável pelo teorema da recursão e porque a função $0(x)$ é uma função básica.

Está assim provado que $g(x,y)$ é computável.

4.3. Resolução

Em primeiro ligar é necessário propor uma definição de f^1 que corresponda à noção intuitiva e formal dessa função. Seja então:

$$f^1(x) = \mu y(|x-f(y)| = 0)$$

Sendo $|x-z|$ computável, cf. exercício anterior, e também $f(z)$ (dado deste enunciado), então $|x-f(z)|$ também é computável pelo teorema da substituição, estando definida para todo os valores de x e de z, em particular para $\forall z \leq y$, já que $f(x)$ e $|x-z|$ são funções totais. Assim, $f^1(x)$ também é URM-computável pelo teorema da minimização.

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Licenciatura em Engenharia Informática e Computação

João Mendes Moreira
João Falcão e Cunha

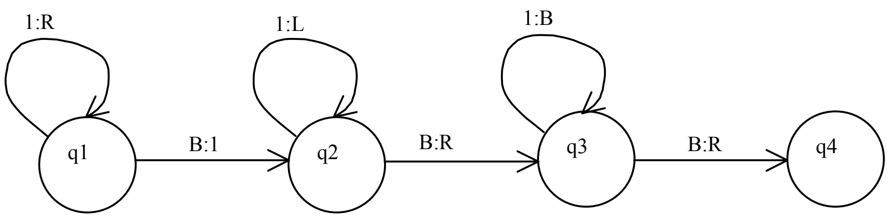
Teoria da Computação I

3º Ano 2001-2002

5ª Aula Prática – Máquina de Turing

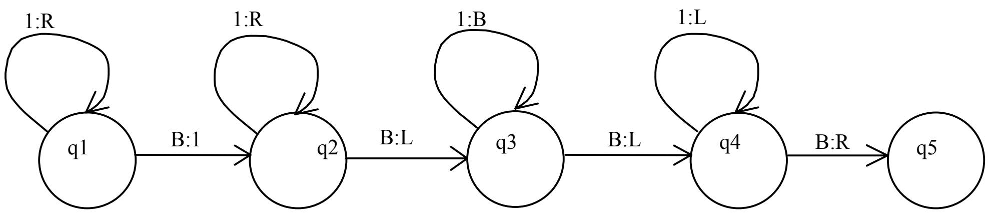
5.1. Resolução

$q_1B1q_2 \quad q_2BRq_3 \quad q_3BRq_4$
$q_11Rq_1 \quad q_21Lq_2 \quad q_31Bq_3$



Resolução alternativa

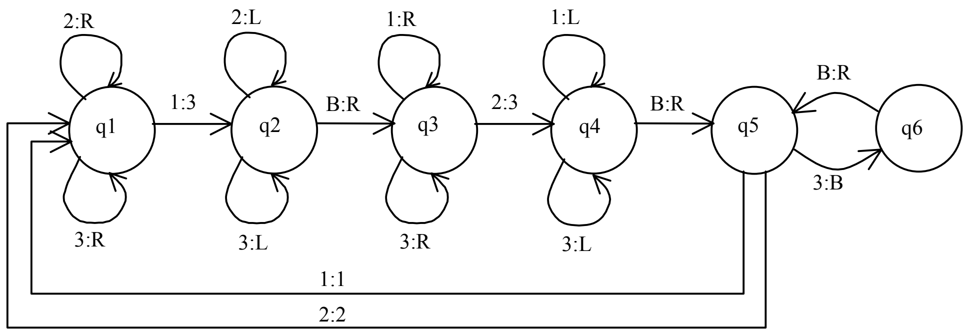
$q_1B1q_2 \quad q_2BLq_3 \quad q_3BLq_4 \quad q_4BRq_5$
$q_11Rq_1 \quad q_21Rq_2 \quad q_31Bq_3 \quad q_41Lq_4$



5.2. Resolução

No estado q1 a cabeça de leitura é deslocada para a direita até encontrar o 1º símbolo 1 substituindo-o pelo símbolo 3. No estado q2 a cabeça de leitura é deslocada para a esquerda até ficar posicionada no 1º símbolo da sequência. No estado q3 a cabeça de leitura é deslocada para a direita até encontrar o 1º símbolo 2 e o substituir pelo símbolo 3. No estado q4, tal como no estado q2, a cabeça de leitura é deslocada para a esquerda até ficar posicionada no 1º símbolo da sequência. Nos estados q5 e q6 os símbolos 3 posicionados no início da sequência são substituídos por B.

$q_1 13 q_2$	$q_2 BR q_3$	$q_3 1R q_3$	$q_4 BR q_5$	$q_5 11 q_1$	$q_6 BR q_5$
$q_1 2R q_1$	$q_2 2L q_2$	$q_3 23 q_4$	$q_4 1L q_4$	$q_5 22 q_1$	
$q_1 3R q_1$	$q_2 3L q_2$	$q_3 3R q_3$	$q_4 3L q_4$	$q_5 3B q_6$	



Resolução alternativa

$q_1 13 q_3$
$q_1 23 q_2$
$q_1 3B q_5$
$q_2 13 q_4$
$q_2 2R q_2$
$q_2 3R q_2$
$q_3 1R q_3$
$q_3 23 q_4$
$q_3 3R q_3$
$q_4 BR q_1$
$q_4 1L q_4$
$q_4 2L q_4$
$q_4 3L q_4$
$q_5 BL q_1$