6. Decidibilidade, indecidibilidade e decidibilidade parcial

Nos capítulos anteriores, já foram referidos diversos problemas decidíveis.

(Exemplos ?)

Apenas foi analisado um único problema indecidível (" f_x é total")

A identificação dos problemas indecidíveis é uma das maiores **aplicações** da Teoria da Computação, pois permite demonstrar os limites teóricos dos computadores "reais".

Lembremos que um predicado (problema) **M(x)** é **decidível** se a sua função característica $\mathbf{c_M(x)}$ dada por:

$$\mathrm{c_M}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 \ , \text{ se } \ M(\mathrm{x}) \text{ se verifica} \\ 0 \ , \text{ se } \ M(\mathrm{x}) \text{ nao se verifica} \end{cases}$$

for **computável**.

Um algoritmo para computar $\mathbf{c_M}$ é chamado **procedimento de decisão** para **M(x)**

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Suponhamos que um dado programa **P** calcula uma dada função total.
Então, existe um índice a tal que **P** = **P_a**.
Além disso, o valor $f_a(a)$ está definido (pois a função é total).

Questão:

Será que existe um procedimento geral que permita decidir se um qualquer programa com o número **x** converge, quando é aplicado ao próprio x?

Ou seja, **os seguintes predicados são decidíveis**?

" $P_x(x)\downarrow$"

" $x \in W_x$"

" $f_x(x)$ está definida"

"$f_U(x, x)$ está definida"

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Teorema 1 O predicado "$x \in W_x$" é indecidível.

Prova: Vamos supor que o predicado é decidível.

Então, a função característica $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in W_x \\ 0 & , \text{ se } x \notin W_x \end{cases}$ é computável.

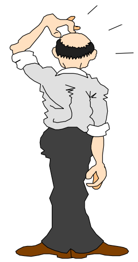
Nesse caso a função $g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } f(x) = 0 \\ \text{indefinido} & , \text{ se } f(x) = 1 \end{cases}$ também é computável

Seja $g = f_a$ **g** está definida em **a** ?

g está definida em **a** se e só se $f(a) = 0 \Leftrightarrow a \notin W_a$

Mas $W_a = \text{Dom}(f_a) = \text{Dom}(g)$

Logo, **g** está definida em **a** se e so se **a** não pertence ao domínio de **g** (!!)



A suposição sobre a computabilidade de f está errada, donde "$x \in W_x$" é **indecidível**.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Corolário: Existe uma função computável h tal que os problemas "$x \in \text{Dom}(h)$" e "$x \in \text{Ran}(h)$" são ambos indecidíveis.

Prova: Seja $h(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in W_x \\ \text{indefinida} & , \text{ se } x \notin W_x \end{cases}$

Esta função é computável, pois $h(x) \approx x\,\mathbf{1}(\,y_U(x,x))$ e y_U é computável.

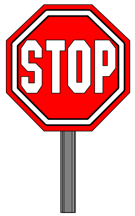
Mas $x \in \text{Dom}(h) \Leftrightarrow x \in W_x \Leftrightarrow x \in \text{Ran}(h)$

Logo, pelo teorema anterior, podemos concluir que ambos os predicados são

Ou seja, não existe um procedimento geral que nos permita decidir se um número pertence ao domínio ou ao contradomínio de uma função computável.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

E agora, o mais famoso exemplo de indecidibilidade:



O problema da paragem

O problema "$f_x(y)$ está definido" (ou $P_x(y)\downarrow$ ou $y \in W_x$)
é indecidível.

Informalmente: se o problema "$f_x(y)$ está definido" fosse decidível, também o seria o problema anterior (mais simples), "$f_x(x)$ está definido".
Mas o Teorema anterior diz-nos que este predicado não é decidível.

Prova: Seja **g** a função característica do predicado "$f_x(y)$ está definido":

$$g(x) = \begin{cases} 1 \ , \text{ se } \ f_x(y) \text{ esta definido} \\ 0 \ , \text{ se } \ f_x(y) \text{ nao esta definido} \end{cases}$$

Se **g** é computável, também é a função **f(x) = g(x,x)**.

Mas **f** é a função característica de "$x \in W_x$", a qual já provámos que não é computável.

Então, g não é computável e $f_x(y)$ "está definido" é indecidível

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

O Problema da Paragem (**The Halting Problem**) tem grandes implicações práticas:

Não existe nenhum método geral efectivo que permita averiguar se um dado programa, para um determinado conjunto de dados eventualmente pára.

Não existe nenhum procedimento efectivo que verifique se um programa tem ciclos infinitos.

O problema indecidível "$x \in W_x$" é a chave para a demonstração de muitos outros problemas indecidíveis.

Considere-se um dado problema **M(x)**. Muitas vezes, a solução deste problema conduz à solução do problema "$x \in W_x$"

Ou seja, **M(x) é decidível se e só se "$\mathbf{x \in W_x}$" é decidível.**

Como já se provou que este problema é indecidível, **M(x)** também será indecidível.
Diz-se, nesse caso, que "$x \in W_x$" é **reduzido** ao problema **M(x)**.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Teorema O problema "$f_x = \underline{\mathbf{0}}$" é indecidível

Prova: Considere-se a função **f** definida por:
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in W_x \\ \text{indefinida} & , \text{ se } x \notin W_x \end{cases}$$

*(**f** foi definida considerando que vai ser usado o **Teorema s-m-n**)*

Defina-se agora $g_x(y) \approx f(x,y)$. **f** foi definida por forma que: $g_x = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow x \in W_x$

f é computável ($f(x,y) = 0 \, . \, y_U(x,x)$), logo, pelo **Teorema s-m-n** existe uma função total computável **k(x)** tal que $f(x,y) \approx f_{k(x)}(y)$ ou seja, $f_{k(x)} = g_x$

Pela definição de **f**, temos $x \in W_x \Leftrightarrow f_{k(x)} = \underline{\mathbf{0}}$ **(*)**

Suponhamos que "$f_x = \underline{\mathbf{0}}$" é decidível.

Logo a função $g(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } f_x = \underline{\mathbf{0}} \\ 0 & , \text{ se } f_x \neq \underline{\mathbf{0}} \end{cases}$ é computável.

Então também a função **h(x) = g(k(x))** é computável.

Mas de **(*)**, nós temos que $h(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } f_x = \underline{\mathbf{0}}; \text{ i.e. } x \in W_x \\ 0 & , \text{ se } f_x \neq \underline{\mathbf{0}}; \text{ i.e. } x \notin W_x \end{cases}$

Do **Teorema 1** vem que **h** não é computável, logo **g** não é computável e o predicado é indecidível.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Na última aula vimos alguns problemas indecidíveis em computabilidade:

"f_x e total"

Problema da Introspecção: " $x \in W_x$ "

(ou " $P_x(x)\downarrow$" ou “ $f_x(x)$ está definida”)

Problema da Paragem: " $y \in W_x$ "

(ou " $P_x(y)\downarrow$" ou " $f_x(y)$ está definida”)

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Do Teorema anterior podemos concluir que existem limitações inerentes correcção de um programa.
De facto, não existe um método geral efectivo que permita verificar se um programa calcula a função **Zero**.

O seguinte corolário mostra que a questão de saber se dois programas computam a mesma função unária é indecidível.

Corolário	O problema "$f_x = f_y$" é indecidível.

Prova: Seja **c** um número tal que $f_c = \underline{\mathbf{0}}$

Se f(x,y) é a função característica de "$f_x = f_y$"

então a função g(x) = f(x,c) é a função característica de "$f_x = \underline{\mathbf{0}}$"

Mas, pelo Teorema anterior, g não é computável, logo f também não.
O predicado "$f_x = f_y$" é indecidível.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Teorema Seja **c** um número qualquer. Os seguintes predicados são indecidíveis:

(a) Problema do Input

"$c \in W_x$" (ou "$P_x(c)\downarrow$" ou "$c \in \mathrm{Dom}\,(f_x)$")

(b) Problema do Output

"$c \in E_x$" (ou "$c \in \mathrm{Ran}\,(f_x)$")

Prova: Usaremos o Teorema s-m-n para reduzir o problema "$x \in W_x$" a estes problemas.

Considere-se a função f(x,y) dada por: $f(x, y) = \begin{cases} y & , \text{se } x \in W_x \\ \text{indefinida} & , \text{se } x \notin W_x \end{cases}$

Seja $g_x(y) = f(x,y)$

g_x é a função identidade ($y \to y$) se $x \in W_x$

g_x está indefinida se $x \notin W_x$

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Então, para qualquer **c**, $c \in \mathrm{Dom}(g_x) \Leftrightarrow c \in \mathrm{Ran}(g_x) \Leftrightarrow x \in W_x$

Pelo Teorema s-m-n, existe uma função computável k tal que $f_{k(x)} = g_x$

Para qualquer **c**, $c \in W_{k(x)} \Leftrightarrow c \in E_{k(x)} \Leftrightarrow x \in W_x$

Seja g' a função característica de "$c \in W_x$"

Então $g'(k(x)) = \begin{cases} 1 & \text{, se } c \in W_{k(x)}\text{; i.e. } x \in W_x \\ 0 & \text{, se } c \notin W_{k(x)}\text{; i.e. } x \notin W_x \end{cases}$

Seja g'' a função característica de "$c \in E_x$"

Então $g''(k(x)) = \begin{cases} 1 & \text{, se } c \in E_{k(x)}\text{; i.e. } x \in W_x \\ 0 & \text{, se } c \notin E_{k(x)}\text{; i.e. } x \notin W_x \end{cases}$

Reduzimos "$x \in W_x$" a cada um destes problemas, logo "$c \in W_x$" e "$c \in E_x$" seriam decidíveis se e só se "$x \in W_x$" o fosse.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Teorema de Rice

Seja $B \subseteq C_1$ e $B \neq \emptyset, C_1$. Então o problema "$f_x \in B$" é indecidível.

Prova Pela álgebra da decidibilidade, sabemos que "$f_x \in B$" é decidível se e só se "$f_x \in C_1 \setminus B$" é decidível. Podemos assumir sem perda de generalidade que $f_\emptyset \notin B$

Escolhe-se uma função $g \in B$

Considere-se a função $$f(x,\ y) = \begin{cases} g(y) & ,\ se\ x \in W_x \\ indefinida & ,\ se\ x \notin W_x \end{cases}$$

Como f é computável (Tese de Church), o Teorema s-m-n diz que existe um função total computável **k(x)** tal que $f(x,y) = f_{k(x)}(y)$

Então, vemos que: $x \in W_x \Rightarrow f_{k(x)} = g$; i.e. $f_{k(x)} \in B$

$x \notin W_x \Rightarrow f_{k(x)} = f_\emptyset$; i.e. $f_{k(x)} \notin B$

Reduzimos o problema "$x \in W_x$" ao problema "$f_x \in B$"

Logo "$f_x \in B$" é indecidível.

6.1 Problemas indecidíveis em computabilidade

Equações “Diophantine”

Uma **equação “diophantine”** é uma equação polinimial com coeficientes inteiros, para a qual são exigidas soluções inteiras.

Por exemplo:

$x^2 - 4 = 0$ tem duas soluções $x = \pm 2$

$x^2 - y = 0$ tem infinitas soluções $\{(0,0);(1,1);(2,4);(-2,4);\ldots\}$

$x^2 - 2 = 0$ não tem soluções

$5x^5 + 17y^{17} - 177 = 0$ (?)

$x^{123666111222} + y^{123666111222} - c^{123666111222} = 0$ (?)

O problema de saber se uma qualquer equação “diophantine” tem soluções inteiras é indecidível (!!)

Predicados parcialmente decidíveis

Apesar do predicado "$x \in W_x$" ter uma função característica não , a seguinte função relacionada com aquela é computável:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in W_x \\ \text{indefinida} & , \text{ se } x \notin W_x \end{cases}$$

Se continuarmos a associar o valor "**1**" à resposta "**Sim**", qualquer algoritmo para **f** dará a resposta "**Sim**" sempre que "$x \in W_x$" e continua indefinidamente quando "$x \notin W_x$"

Esse procedimento é designado por "procedimento de decisão parcial" para o problema "$x \in W_x$" e este problema diz-se parcialmente decidível.

Definição: Um predicado M(x) é **parcialmente decidível** se a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } M(x) \text{ se verifica} \\ \text{indefinida} & , \text{ se } M(x) \text{ não se verifica} \end{cases}$$

é computável. Esta função é designada por **função característica parcial**.

Exemplos de Predicados parcialmente decidíveis

1. O problema da Paragem "$P_x(y)\downarrow$" é parcialmente decidível, pois a sua função característica parcial é computável:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } P_x(y)\downarrow \\ \text{indefinida} & , \text{ senão} \end{cases}$$

f é computável pela Tese de Church ou considerando que $f(x, y) \simeq \mathbf{1}(\psi_U(x, y))$

2. Qualquer predicado decidível é parcialmente decidível;

3. Para qualquer função computável g(x) o problema "$x \in \mathrm{Dom}(g)$" é parcialmente decidível, pois a sua função característica parcial $\mathbf{1}(g(x))$)

4. O problema "$x \notin W_x$" não é parcialmente decidível, pois a sua função característica parcial não é computável.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \notin W_x \\ \text{indefinida} & , \text{ se } x \in W_x \end{cases}$$

Se **f** for computável, tem um índice **m**. Então vejamos o que acontece quando aplicamos **f** a **m**:

$$m \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow m \in \mathrm{Dom}(f_m) \Leftrightarrow m \in W_m \Leftrightarrow f(m) \text{ indefinido} \Leftrightarrow m \notin \mathrm{Dom}(f)$$

Predicados parcialmente decidíveis

Teorema Um predicado M(**x**) é parcialmente decidível se e só se existe uma função computável g(**x**) tal que:
M(**x**) verifica-se se e só se $x \in \mathrm{Dom}(g)$

Prova: a) Se M(**x**) é parcialmente decidível com função característica parcial f(**x**), então pela própria definição de f temos que M(**x**) é verdade se e só se $x \in \mathrm{Dom}(f)$

Fazemos então g(**x**) ≈ f(**x**). Como f é computável, g é computável.

b) Seja g uma função computável tal que M(**x**) se verifica se e só se $x \in \mathrm{Dom}(g)$
Queremos provar que M(**x**) é parcialmente decidível

De facto, a função característica parcial deste predicado definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \in \mathrm{Dom}(g) \\ \text{indefinida} & , \text{se } x \notin \mathrm{Dom}(g) \end{cases}$$

Esta função é computável, pois g é computável e $f(x) = \mathbf{1}(g(x))$

Logo, M(x) é parcialmente decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

Teorema Um predicado M(**x**) é parcialmente decidível se e só se existe um predicado decidível R(**x**, y) tal que:

M(**x**) se e só se $\exists y \ R(\mathbf{x}, y)$

Prova:

a) Se M(**x**) é parcialmente decidível tem um procedimento de decisão parcial dado pelo programa P. Defina-se um predicado R(x,y) por: $R(x, y) \equiv P(x) \downarrow$ em y passos

Este predicado é decidível (ver aulas anteriores). Além disso,

M(**x**) verifica-se se e só se $P(x) \downarrow$, ou seja, se e só se $\exists y \ R(\mathbf{x}, y)$

b) Seja R(**x**, y) um predicado decidível tal que: M(**x**) se e só se $\exists y \ R(\mathbf{x}, y)$

Queremos provar que M(x) é parcialmente decidível.

Considere-se a função $g(\mathbf{x}) \approx m \ y \, R(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} \text{menor y tal que } R(\mathbf{x}, y) \text{ se verifica} & \text{, se existe y} \\ \text{indefinido} & \text{, se y nao existe} \end{cases}$

Esta função é computável: $g(\mathbf{x}) = m \ y \, (\overline{sg}(c_R(\mathbf{x}, y)) = 0)$

Logo, M(x) verifica-se se e só se $x \in Dom(g)$. Pelo teorema anterior, M(x) é parcialmente decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

O Teorema anterior pode ser usado para estabelecer algumas propriedades dos predicados parcialmente decidíveis que nos ajudam a reconhecê-los.

Teorema:	Se M(**x**, y) é um predicado parcialmente decidível, então também o é o predicado $\exists y \ M(\mathbf{x}, y)$

Prova: Recorrendo ao teorema anterior, seja R(x, y, z) um predicado decidível tal que

M(**x**, y) se e só se $\exists z \ R(\mathbf{x}, y, z)$

Então, $\exists y \ M(\mathbf{x}, y) \ \Leftrightarrow \ \exists y \ \exists z \ R(\mathbf{x}, y, z)$

Utilizando a técnica de codificar o par de números y, z pelo único número $u = 2^y \, 3^z$

a pesquisa do par y, z, tal que R(**x**, y, z) reduz-se à pesquisa do número u tal que R(**x**, $(u)_1$, $(u)_2$)

ou seja, $\exists y \ M(\mathbf{x}, y) \ \Leftrightarrow \ \exists u \ R(\mathbf{x}, (u)_1, (u)_2)$

O predicado $S(\mathbf{x}, u) \equiv R(\mathbf{x}, (u)_1, (u)_2)$ é decidível (por substituição) logo,

pelo Teorema anterior, o predicado $\exists y \ M(\mathbf{x}, y)$ é parcialmente decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

A repetida aplicação do Teorema anterior leva-nos ao Corolário:

Corolário: Se M(**x**, **y**) é parcialmente decidível ($y = y_1, y_2, ..., y_m$), então também o é o predicado $\exists y_1 \ldots \exists y_m \; M(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m)$

Exemplos: Os seguintes predicados são parcialmente decidíveis:

1. $x \in E_y^{(n)}$ (n fixo)

$$x \in E_y^{(n)} \Leftrightarrow \exists z_1 \ldots \exists z_n \, \exists t \, \underbrace{(P_y(z_1, \ldots, z_n) \downarrow x \text{ em } t \text{ passos})}_{\text{predicado decidível}}$$

Podemos então aplicar o corolário.

2. $W_x \neq \varnothing$

$$W_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \, \exists t \, \underbrace{(P_x(y) \downarrow \text{ em } t \text{ passos})}_{\text{predicado decidível}}$$

Podemos aplicar o corolário.

Predicados parcialmente decidíveis

Teorema: Um predicado M(**x**) é decidível se e só se M(**x**) e "não M(**x**)" forem ambos parcialmente decidíveis.

Prova: a) Se M(**x**) é decidível, também "não M(**x**)" é decidível e, nesse caso, M(**x**) e "não M(**x**)" são parcialmente decidíveis, pois todos os predeicados decidíveis são parcialmente decidíveis.

b) Sejam agora M(**x**) e "não M(**x**)" predicados parcialmente decidíveis com procedimentos de decisão parcial F e G. Queremos provar que M(**x**) é decidível.

$$F(\mathbf{x})\downarrow \;\Leftrightarrow\; M(\mathbf{x}) \text{ verifica-se}$$

$$G(\mathbf{x})\downarrow \;\Leftrightarrow\; \text{"não } M(\mathbf{x})\text{" verifica-se}$$

Além disso, $F(\mathbf{x})\downarrow$ ou $G(\mathbf{x})\downarrow$ mas nunca ambos

O seguinte algoritmo permite decidir M(**x**): para um dado **x**, correr os programas F(**x**) e G(**x**) simultaneamente ou alternadamente um passo de cada. Se F(**x**) parou, M(**x**) verifica-se. Se G(**x**) parou "não M(**x**)" verifica-se.
Logo M(**x**) é decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

Prova <u>alternativa</u> da alínea b)

Sejam M(**x**) e "não M(**x**)" predicados parcialmente decidíveis

Então, existem predicados decidíveis R(**x**, y) e S(**x**, y) tal que:

$M(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists y\, R(\mathbf{x}, y)$ e $\text{não } M(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists y\, S(\mathbf{x}, y) \Leftrightarrow \exists y\, (\text{não } R(\mathbf{x}, y))$

Defina-se $f(\mathbf{x}) = m\ y\ (R(\mathbf{x}, y) \text{ ou } (\text{não } R(\mathbf{x}, y)))$

f (**x**) é computável e está definida para todo o **x** .

Então $M(\mathbf{x}) \Leftrightarrow R(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$

Como R(**x**, f(**x**)) é decidível, M(**x**) é decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

O seguinte Teorema fornece uma prova alternativa para o Problema da Paragem ser indecidível.

Corolário: O predicado "$P_x(y) \uparrow$" (ou "$y \notin W_x$" ou "$f_x(y)$ indefinida") não é parcialmente decidível .

Prova: O problema "$P_x(y) \downarrow$" é parcialmente decidível, pois a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } P_x(y)\downarrow \\ \text{indefinida} & , \text{ senão} \end{cases}$$

é computável.

"$P_x(y) \uparrow$" $\equiv$ "não $P_x(y) \downarrow$"

Se o predicado "$P_x(y) \uparrow$" fosse parcialmente decidível, pelo Teorema anterior, o Problema da Paragem seria decidível, o que já vimos ser falso.
Logo, o predicado "$P_x(y) \uparrow$" não é parcialmente decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

O resultado final deste capítulo fornece um mecanismo útil para provar que uma função computável.

Teorema: Seja f(**x**) uma função parcial. Então f é computável se e só se o predicado "$f(\mathbf{x}) \approx y$" for parcialmente decidível.

Prova: a) Seja f uma função computável por um programa P. Então, temos

$$f(\mathbf{x}) \approx y \iff \exists t\, (P(\mathbf{x}) \downarrow y \text{ em } t \text{ passos})$$

decidível

parcialmente decidível

Então "$f(\mathbf{x}) \approx y$" também é parcialmente decidível.

Predicados parcialmente decidíveis

Prova (cont.)

b) Suponhamos agora que "$f(\mathbf{x}) \approx y$" é parcialmente decidível

Queremos provar que f é computável

Seja R (**x**, y, t) um predicado decidível tal que $f(\mathbf{x}) \approx y \;\Leftrightarrow\; \exists\, t\, R(\mathbf{x}, y, t)$

Então temos o seguinte algoritmo para computar f(**x**):

*"Procurar um par de números y, t, tais que R(**x**, y, t) se verifica.*
Se, e quando esse par for encontrado, $f(\mathbf{x}) \approx y$ *".*

Então, pela Tese de Church, f é computável.

Predicados parcialmente decidíveis

Prova alternativa (formal) de b)

Como $"f(\mathbf{x}) \approx y"$ é parcialmente decidível,

seja R ($\mathbf{x}$, y, t) um predicado decidível tal que $f(\mathbf{x}) \approx y \iff \exists t\, R(\mathbf{x}, y, t)$

Então $\exists y\, (f(\mathbf{x}) \approx y) \iff \exists y\, \exists t\, R(\mathbf{x}, y, t)$

Seja $z = 2^y 3^t$ $\qquad \exists y\, (f(\mathbf{x}) \approx y) \iff \exists z\; R(\mathbf{x}, (z)_1, (z)_2)$

Seja $S(\mathbf{x}, z) \equiv R(\mathbf{x}, (z)_1, (z)_2)$ $\qquad$ S($\mathbf{x}$, z) é decidível (por substituição)

Então $\exists z\, S(\mathbf{x}, z) \equiv \exists z\, R(\mathbf{x}, (z)_1, (z)_2)$ é parcialmente decidível

Logo, $"\exists y\, (f(\mathbf{x}) \approx y)"$ é parcialmente decidível

Defina-se $M(\mathbf{x}) \equiv \exists z\; R(\mathbf{x}, (z)_1, (z)_2)$ e $g(\mathbf{x}) = \mu z\; S(\mathbf{x}, z)$

g($\mathbf{x}$) é computável e M($\mathbf{x}$) verifica-se se e só se $\mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(g)$

e $g(\mathbf{x}) = z = 2^y 3^t$ com $y = (z)_1$ e $t = (z)_2$ e $f(\mathbf{x}) \approx y$

Logo, f é computável.