Anexo A

Adaptação do Controlador PID analógico a um controlador Digital

Neste anexo, deduz-se a fórmula do controlador PID (Proporcional, Integrativo e Derivativo) digital, através da discretização do clássico controlador PID analógico.

Desta forma, é possível utilizar os métodos convencionais de determinação dos parâmetros do controlador analógico, e depois adapta-los ao PID digital.

Obviamente, isto só resulta se o período de amostragem / actuação for suficientemente fino em relação às constantes de tempo do sistema e do controlador analógico original. Se esta condição não se verificar é necessário utilizar outras técnicas para determinar as constantes do PID digital. No entanto o código de implementação do PID digital é obviamente o mesmo.

A partir da equação do PID:

$$a(t) = K_P\ e(t) + K_I \int_0^t e(t)\,dt + K_D \frac{d\,e(t)}{dt} \tag{A.1}$$

onde a(t) é o sinal de actuação, e(t) o erro entre a saída e a referencia e K_P, K_I e K_D as constantes proporcional, integral e derivativa do PID, a discretização é obtida substituindo a variável tempo (t) por:

$$t = n\,T \tag{A.2}$$

onde T é o período de amostragem e n o numero da amostra / actuação.

Obtêm-se assim uma equação discretizada:

$$a(nT) = K_P\ e(nT) + K_I\ T \sum_{j=0}^{n} e(jT) + K_D \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T} \tag{A.3}$$

Como nT representa a amostra numero do sistema, é substituída simplesmente por n, dando origem á primeira equação do PID digital:

$$a(n) = K_P\ e(n) + K_I\ T \sum_{j=0}^{n} e(j) + K_D \frac{e(n) - e(n-1)}{T} \qquad (A.4)$$

Simplificando,

$$a(n) = \left(K_P + \frac{K_D}{T} \right) e(n) + \frac{K_D}{T}\ e(n-1) + K_I\ T \sum_{j=0}^{n} e(j) \qquad (A.5)$$

$$a(n) = A\ e(n) + B\ e(n-1) + C \sum_{j=0}^{n} e(j) \qquad (A.6)$$

Esta equação é facilmente implementada num yC:

```
e = referencia - ValorMedido

IntErro = IntErro + e

a = A*e + B*e1 + C*IntErro

e1 = e
```

Uma outra fórmula pode ser deduzida se atendermos a que:

$$a(n-1) = \left(K_P + \frac{K_D}{T} \right) e(n-1) + \frac{K_D}{T}\ e(n-2) + K_I\ T \sum_{j=0}^{n-1} e(j) \qquad (A.7)$$

Ao calcularmos:

$$\begin{aligned} a(n) - a(n-1) = & \left(K_P + \frac{K_D}{T} \right) e(n) + \frac{K_D}{T}\ e(n-1) + K_I\ T \sum_{j=0}^{n} e(j) \\ & - \left(K_P + \frac{K_D}{T} \right) e(n-1) - \frac{K_D}{T}\ e(n-2) - K_I\ T \sum_{j=0}^{n-1} e(j) \end{aligned} \qquad (A.8)$$

atendendo a que:

$$\sum_{j=0}^{n} e(j) - \sum_{j=0}^{n-1} e(j) = e(n) \qquad (A.9)$$

obtêm-se:

$$a(n) = a(n-1) + \left(K_P + \frac{K_D}{T} + K_I\ T \right) e(n) + \left(-K_P - 2\frac{K_D}{T} \right) e(n-1) + \left(\frac{K_D}{T} \right) e(n-2) \qquad (A.10)$$

$$a(n) = a(n-1) + A.e(n) + B.e(n-1) + C.e(n-2) \qquad (A.11)$$

A codificação da equação obtida também é evidente e imediata.

No entanto esta fórmula está mais sujeita aos erros de truncamento e discretização dos parâmetros A, B e C.