# A Medição e o Erro de Medição

Sumário

# Introdução

# Definições

**Metrologia**: *Ciência das medições* [VIM 2.2].

**Medição**: *Conjunto de operações que têm por objectivo determinar o valor de uma grandeza* [VIM 2.1].

Estas operações são realizadas manual ou automaticamente.

**Princípio de medição:**

**Método de Medição:**

**Mensuranda**: *grandeza particular submetida à medição* [VIM 2.6]. A especificação de uma mensuranda pode requerer informações acerca de grandezas como o tempo, a temperatura e a pressão.

**Resultado de uma medição**: *valor atribuído a uma mensuranda, obtido na medição* [VIM 3.1].

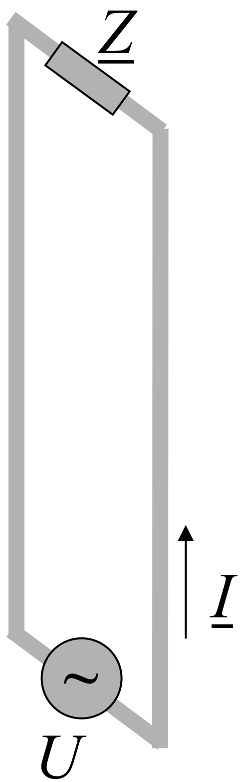
**Instrumento de medição:**

**Cadeia de medição:**

**Sistema de medição:**

# Caracterização da qualidade da medição

## Exemplo: Medição da potência activa, *P*, absorvida pela carga $\underline{Z}$




**Questões preliminares a colocar sobre o problema de medição:**

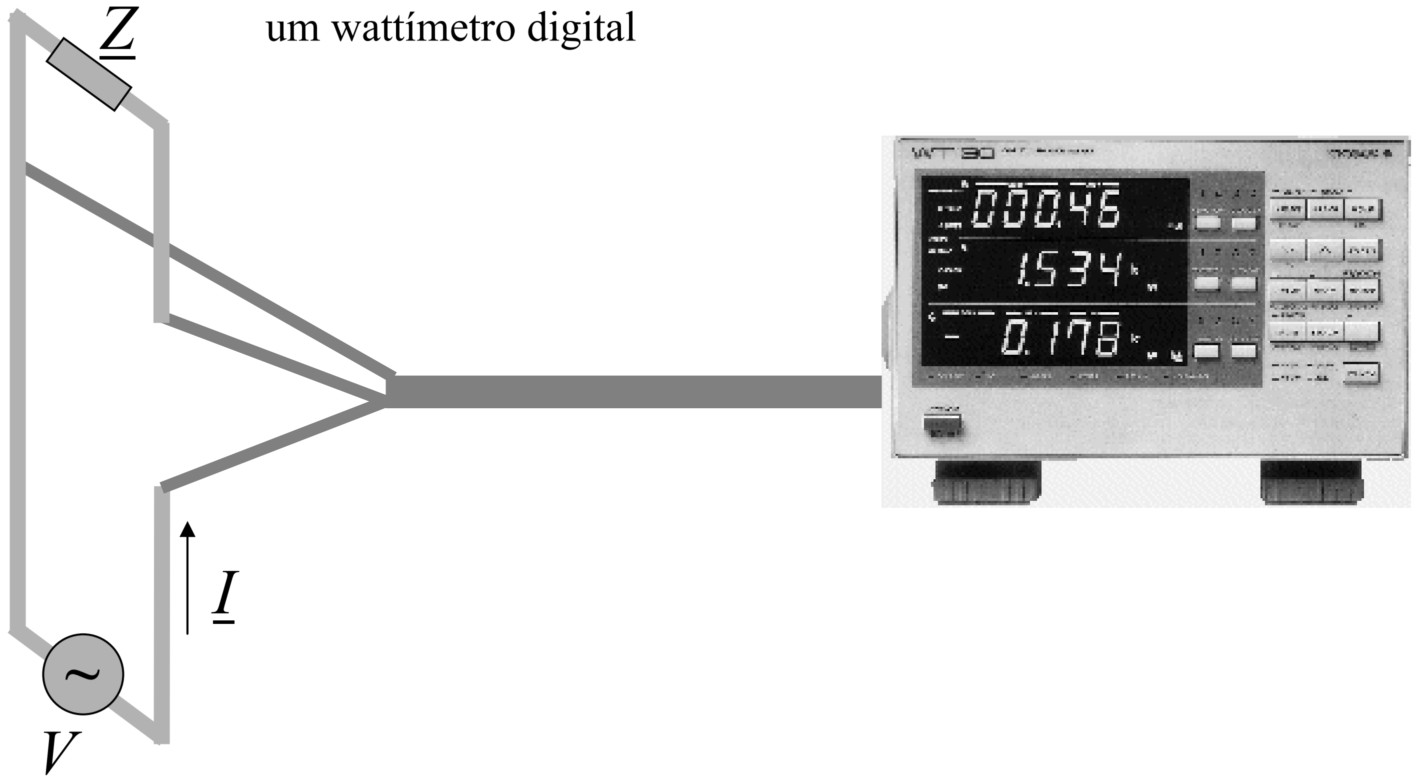
- Identificação tão completa quanto possível da mensuranda.
- Selecção do método de medição
  - Caracterização do problema de medição.
  - Identificação das grandezas a medir.
  - Formulação dos modelos matemáticos.
- Caracterização da qualidade de medição
  - Erros sistemáticos
  - Erros aleatórios
  - Incertezas de medição
  - ...

# Caracterização da qualidade da medição

**A mensuranda é a potência activa P dada pela expressão**

$$P = UI\cos\varphi$$

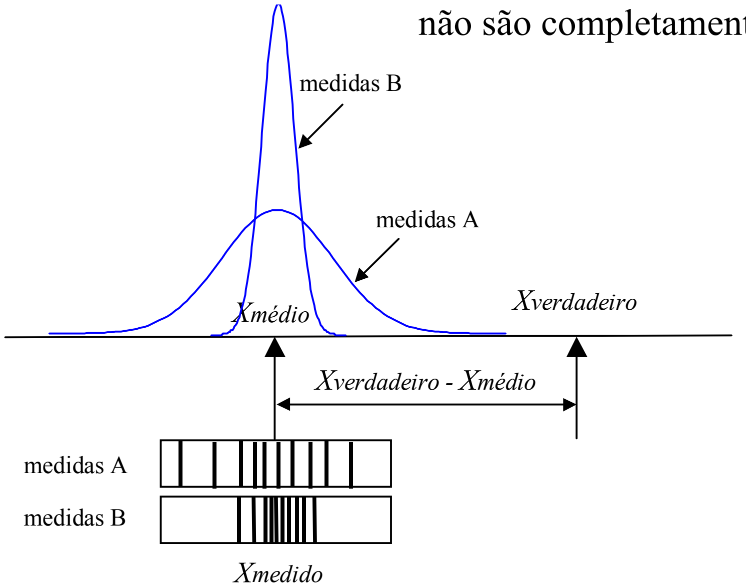
Antes da caracterização completa do problema de medição, apresenta-se o esquema eléctrico da medição de potência activa com um wattímetro digital



# O erro da medição

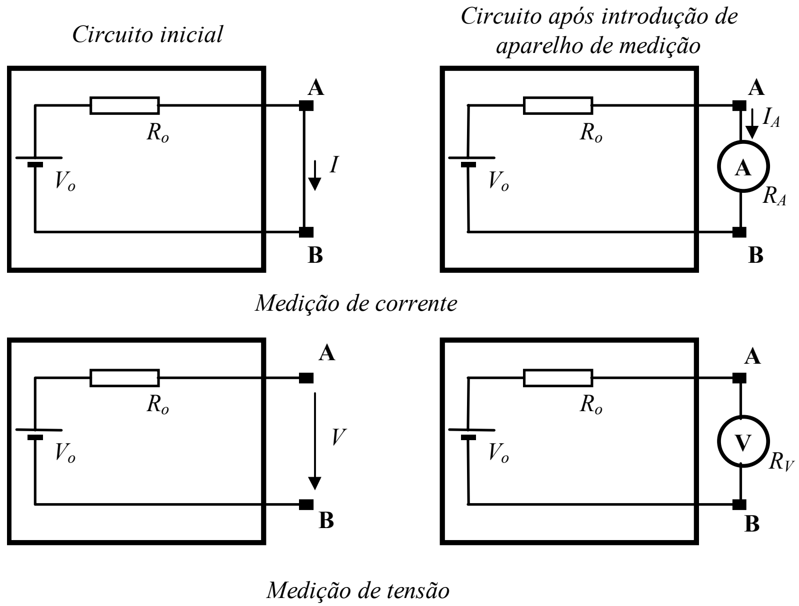
**Erro aleatório**: *resultado da medição subtraído da média que resultaria de um número infinito de medições da mesma mensuranda em condições de repetibilidade* [VIM 3.13]. De notar que: 1) o erro aleatório é igual ao erro menos o erro sistemático; 2) sendo exigido um número infinito de medições, apenas é possível obter uma estimativa do erro aleatório.

**Erro sistemático**: *média que resultaria de um número infinito de medições da mesma mensuranda em condições de repetibilidade subtraída do valor verdadeiro da mensuranda* [VIM 3.14]. De notar que: 1) o erro sistemático é igual ao erro menos o erro aleatório; 2) como o valor verdadeiro de uma grandeza é desconhecido, o erro sistemático e as suas causas não são completamente conhecidas.



# Erros sistemáticos

## O erro por efeito de carga na medição de corrente e tensão




**Medição de corrente**

$$I_A = \frac{V_o}{R_o + R_A} \qquad I = \frac{V_o}{R_o}$$

$$\varepsilon = \frac{I_A - I}{I} = \frac{I_A}{I} - 1 = -\frac{R_A}{R_o + R_A}$$

$$F_c(I) = \frac{I}{I_A} = \frac{R_o + R_A}{R_o}$$

**Medição de tensão**

$$V_V = \frac{R_V}{R_o + R_V} V_o$$

$$\varepsilon = \frac{V_V - V_o}{V_o} = \frac{V_V}{V_o} - 1 = -\frac{R_o}{R_o + R_V}$$

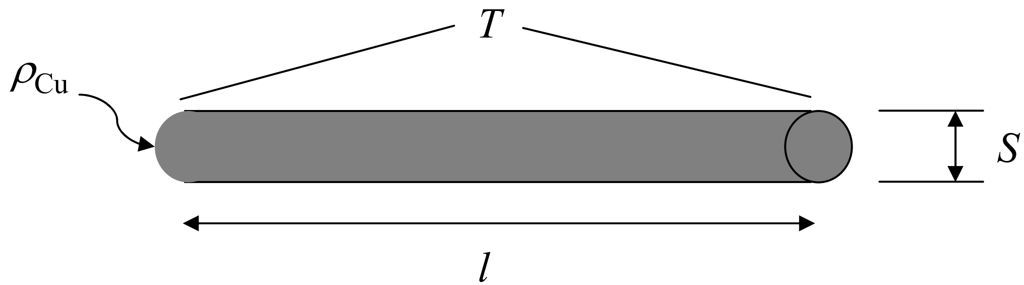
$$F_c(V) = \frac{V_o}{V_V} = \frac{R_o + R_V}{R_V}$$

**Correcção**: *valor acrescentado algebricamente ao resultado bruto da medição, para compensar o erro sistemático* [VIM 3.15]. Assim, a correcção é igual e de sinal contrário ao erro sistemático estimado. Já que o erro sistemático não é conhecido perfeitamente, a compensação do erro não é completa.

**Factor de correcção**: *factor numérico pelo qual se multiplica o resultado bruto da medição, para compensar o erro sistemático* [VIM 3.16].

# Verdadeiro valor, erro e incerteza

**A mensuranda**: resistência, $R$, de um condutor de cobre, à temperatura de 20 ºC, de secção circular de $S$ = 1mm$^2$ e comprimento igual $l$ = 1 m.




**Equação de medição**

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

## ¿ Questão: Qual o verdadeiro valor da mensuranda ?

O resultado de uma medição de um condutor nas condições definidas, após efectuadas todas as correcções dos erros conhecidos, dá origem, quando muito, à <u>melhor estimativa do "verdadeiro"</u> valor da mensuranda, porque:

- As medições de $l$, $S$ são afectadas por uma incerteza.
- Não se garante a uniformidade da secção, ao longo do comprimento.
- Não se garante a uniformidade da distribuição da temperatura $T$.
- Não se garante a pureza do cobre.
- A resistência é influenciada por outras grandezas não especificadas
- …

# Definições do VIM*

**Princípio de Medição**: *fundamento científico da medição* [VIM 2.3] (como o efeito termoeléctrico para a medição de temperatura ou o efeito de *Doppler* para a medição de velocidade).

**Método de medição**: *sequência lógica de operações, descritas genericamente, utilizadas na execução de medições* [VIM 2.4].

**Mensuranda**: *grandeza particular submetida à medição* [VIM 2.6]. A especificação de uma mensuranda pode requerer informações acerca de grandezas como o tempo, a temperatura e a pressão.

**Resultado de uma medição**: *valor atribuído a uma mensuranda, obtido na medição* [VIM 3.1]. Quando se usa este termo, devemos indicar claramente se o resultado da medição se refere a uma indicação de um instrumento. se é um resultado bruto, se se trata de um resultado corrigido ou se é o resultado de uma média de várias medições A expressão completa de um resultado de medição deve incluir informação sobre a incerteza da medição.

**Instrumento de medição**: *dispositivo destinado à execução da medição, isolado ou em conjunto com equipamentos suplementares* [VIM 4.1].

**Cadeia de medição**: *sequência de elementos de um instrumento de medição ou de um sistema de medição que constitui o trajecto do sinal de medição desde a entrada até à saída* [VIM 4.4].

**Sistema de medição**: *conjunto completo de instrumentos de medição e outros dispositivos montados para executar uma medição específica* [VIM 4.5].

*VIM - Vocabulário Internacional de Metrologia

# Definições do VIM*

**Valor (de uma grandeza)**: *magnitude de uma grandeza particular em geral expressa pelo produto da unidade de medida multiplicada por um número* [VIM 1.18]. Por exemplo: 5,12 m; 3,12 kg; 8,35 V. **Valor numérico (de uma grandeza)**: *quociente do valor de uma grandeza pela unidade utilizada na sua expressão* [VIM 1.21]. Os valores numéricos dos exemplos anteriores são 5,12; 3,12; 8,35.

**Valor verdadeiro (de uma grandeza)**: *valor consistente com a definição de uma dada grandeza particular* [VIM 1.19]. É portanto um valor que deve ser obtido em condições perfeitas de medição. São valores, que pela sua natureza ideal, não podem ser determinados.

**Valor convencionalmente verdadeiro (de uma grandeza)**: *valor atribuído a uma grandeza particular e aceite, por vezes por convenção, como tendo uma incerteza apropriada a um determinado objectivo* [VIM 1.20].

**Exactidão de medição**: *aproximação entre o resultado da medição e o valor verdadeiro da mensuranda* [VIM 3.5]. Em VIM, há duas notas importantes a esta definição: 1) exactidão é um conceito qualitativo; 2) deve ser evitado o termo precisão no lugar de exactidão. Um conceito qualitativo como este, não deve ser referido quantitativamente com números, como frequentemente acontece. Os números devem ser associados à incerteza da medição. Assim, devemos escrever a "incerteza de uma medição é de 0,2 mV", mas não a "exactidão da medição é de 0,2 mV". Para evitar a proliferação de termos qualitativos não definidos, recomenda-se a não utilização de "inexactidão".

*VIM - Vocabulário Internacional de Metrologia

# Definições do VIM*

**Repetibilidade dos resultados (de uma medição)**: *aproximação entre os resultados de medições sucessivas de uma mesma mensuranda, efectuadas nas mesmas condições de medição* [VIM 3.6]. Estas condições são designadas por condições de repetibilidade, que incluem: o mesmo procedimento de medição; o mesmo observador; o mesmo instrumento de medição, usado nas mesmas condições; o mesmo local; a repetição deve ser realizada durante um curto intervalo de tempo.

**Reprodutibilidade dos resultados (de uma medição)**: *aproximação entre os resultados das medições da mesma mensuranda efectuada com alteração das condições da medição* [VIM 3.7]. As alterações que se consideram incluem o princípio e o método de medição, o observador, o instrumento, o padrão de referência, o local, as condições de utilização e o tempo.

**Incerteza de medição**: *parâmetro associado ao resultado da medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos à mensuranda* [VIM 3.9]. Este parâmetro pode ser, por exemplo, o desvio-padrão (ou um seu múltiplo).

**Erro da medição**: *diferença algébrica entre o resultado da medição e o valor verdadeiro da mensuranda* [VIM 3.10]. Uma vez que o valor verdadeiro não é determinável, na prática é usado um valor convencionalmente verdadeiro. Quando é necessário distinguir "erro" de "erro relativo", o primeiro é por vezes chamado "erro absoluto de medição". Este não deve ser confundido com valor absoluto do erro, que é o módulo do erro.

*VIM - Vocabulário Internacional de Metrologia

# O número de algarismos significativos

A expressão numérica de um resultado de medição deve incorporar a incerteza da medição, indicando o intervalo de valores em que o resultado está contido. Por ex: a medida de um voltímetro é

$$3{,}50\ \text{V} \pm 2\ \%,\ (\text{ou } 3{,}43\ \text{V} \leq V_x \leq 3{,}57\ \text{V})$$

ou de um amperímetro é

$$3{,}21\ \text{A} \pm 0{,}02\ \text{A}\ (\text{ou } 3{,}19\ \text{A} \leq I_x \leq 3{,}23\ \text{A})$$

Repare-se que no primeiro caso, o zero é um algarismo significativo, assim como o 3 e 5. No exemplo da corrente, todos os algarismos são significativos.

**Um valor e a incerteza correspondente devem ser compatíveis. Por exemplo, não são válidos**

$$\cancel{R = 1{,}234\ \Omega \pm 5\ \%}$$

ou

$$\cancel{C = 78\ \mu\text{F} \pm 0{,}01\ \mu\text{F}}$$

**Algumas regras**

Na **adição ou subtracção**, deve observar-se como regra que o resultado não deve conter nenhum algarismo para a direita do dígito na posição mais elevada representada numa das parcelas. Por exemplo:

| | | |
|---|---|---|
| 123 000 000 | 123 000 000 | |
| 315 362 000 | 315 400 000 | |
| 198 325 344 | 198 300 000 | |
| 636 687 344 | 636 700 000 | **Resultado** = 637 000 000 |

Na **multiplicação ou divisão**, a regra a usar é: o produto ou quociente devem ser representados com um número de algarismos significativos igual ao factor com um menor número de algarismos significativos. Por exemplo:

$412{,}6 \times 1{,}24 = 511{,}624$ deve ser arredondado para 512

e

$412{,}6:1{,}24=332{,}74193548387(\ldots)$
deve ser arredondado para 333

# Definições do VIM*

## A exactidão nos instrumentos de medição

**Exactidão (de um instrumento de medição)**: *aptidão de um instrumento de medição para dar indicações próximas do verdadeiro valor da grandeza medida* [VIM 5.18]. Recorda-se que exactidão é um conceito qualitativo.

**Classe de exactidão (de um instrumento de medição)**: *classe de instrumentos de medição que satisfazem certos requisitos metrológicos com vista a manter os erros dentro de limites especificados* [VIM 5.19]. A classe de exactidão é indicada por um número ou um símbolo adoptado por convenção, designado por índice de classe.

**Erro de indicação (de um instrumento de medição)**: *diferença entre a indicação do instrumento de medição e o valor verdadeiro da correspondente grandeza de entrada* [VIM 5.20]. Como o verdadeiro valor não pode ser determinado, na prática usa-se o valor convencional.

**Erro máximo admissível (de um instrumento de medição)**: valor extremo do erro admitido pelas especificações, regulamentos, etc., relativos a um dado instrumento de medição [VIM 5.21].

**Erro no ponto de ensaio (de um instrumento de medição)**: *erro de um instrumento de medição para um dado valor da indicação ou para um dado valor da mensuranda escolhido para o ensaio do instrumento* [VIM 5.22].

O **erro no zero (de um instrumento de medição)** *é o erro no ponto de ensaio quando o valor especificado para a mensuranda é zero* [VIM 5.23].

**Erro intrínseco (de um instrumento de medição)**: *erro de um instrumento de medição determinado nas condições de referência* [VIM 5.24].

**Erro sistemático (de um instrumento de medição)**: *erro sistemático da indicação do instrumento de medição* [VIM 5.25]. Este erro é normalmente estimado tomando o valor médio do erro de indicação de um número apropriado de medições repetidas. A **fidelidade de um instrumento de medição** é *a aptidão desse instrumento para dar indicações isentas de erro sistemático* [VIM 5.26].

**Repetibilidade (de um instrumento de medição)**: *aptidão de um instrumento de medição para dar, em condições de utilização definidas, respostas muito próximas quando se aplica repetidamente a mesma mensuranda* [VIM 5.27]. As condições de repetibilidade são as referidas anteriormente. A repetibilidade é expressa, quantitativamente, em termos de características de dispersão das indicações.

Vocabulário Internacional de Metrologia

# Cálculo de erros de medição

**O erro de medição é**

$$\Delta x = x - x_v$$

O valor absoluto do erro é o módulo de $\Delta x$, isto é

$$\delta x = |\Delta x| = |x - x_v|$$

O erro relativo é

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_v} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_x \approx \frac{\Delta x}{x}$$

Para a equação de medição

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

O erro total, $\Delta y$, tem a expressão

$$\Delta y = f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Do desenvolvimento de $f$ em série de Taylor no ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtemos

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

ou

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

Admitindo que é conhecido o majorante $\Delta x_{i\max}$ de $\Delta x_i$, o majorante do valor absoluto do erro de $y$, $\delta y$, é dado pela relação

$$\delta y \le \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_{i\,max} \right|$$

A expressão do majorante do erro relativo é então

$$\varepsilon_y \le \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_{i\,max}}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|$$

Donde resulta a expressão geral dos erros

$$\varepsilon_y \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{f} \right| \varepsilon_{x_i}$$

**Exemplo**

Calcular o erro relativo (a tolerância) do paralelo de duas resistências $R_1$ e $R_2$, sabendo que o erro máximo relativo de cada uma das resistências é, respectivamente, $\varepsilon_{R1}$ e $\varepsilon_{R2}$. Comparar os resultados obtidos pela aplicação da expressão geral dos erros com a aplicação da regra da diferencial logarítmica às expressões $R=R_1.R_2/(R_1+R_2)$ e $R=1/(1/R_1+1/R_2)$.

# O erro na instrumentação analógica e digital

O limite do erro num **instrumento analógico** é representado pelo **índice de classe**.

O índice de classe é, em percentagem, o quociente entre o valor absoluto máximo do erro, suposto constante em toda a gama de medição, e o valor máximo da escala de medição, ie

$$\delta_{max} = i.c.\ V_{FE} / 100$$

*i.c.* é o índice de classe e $V_{FE}$ é a tensão de fim de escala. O erro relativo máximo é

$$\varepsilon_{max} = \delta_{max} / leitura = i.c.\ V_{FE} / leitura\ (\%)$$

Na **instrumentação digital**, o erro é especificado em duas parcelas:

1) a percentagem da entrada (ou leitura);

2) um erro de resolução em número de dígitos da década menos significativa.

Por exemplo, num indicador digital de três dígitos (indicações de 000 a 999), a especificação do erro é

±[ 0,1 % da entrada + 1 dígito (LSD) ]

onde LSD é o dígito menos significativo.

**Exemplo 1**

Para medir a diferença de potencial entre os pontos A e B de um circuito eléctrico usou-se a diferença entre dois valores de tensão referidas a um ponto comum, através da relação $V_{AB} = V_{AC} - V_{BC.}$ As tensões $V_{AC}$ e $V_{BC}$ foram medidas com dois voltímetros, tendo-se obtido: $V_{AC}$ = 8,7 V (voltímetro com *i.c.*= 0,5, na escala de 10 V) e $V_{BC}$ = 8,4 V (*i.c.*=1, na escala de 10 V). Qual o erro máximo relativo da medição?

**Exemplo 2**

Um voltímetro digital apresenta as seguintes características: número de dígitos: 4 ½ dígitos (*); escala : DC - 200 mV; erro máximo: ±[ 0,04 % da leitura + 3 dígitos (LSD) ]. Calcule o erro relativo máximo para as leituras de 2,00 mV, 5,00mV, 10,00 mV, 50,00 mV, 100,00 mV e 199,99 mV.

# Estatística da medida

## Parâmetros estatísticos importantes

**Média**

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

**Desvio relativamente à média**

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

**Valor absoluto do desvio médio**

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |d_i|$$

**Erro relativo**

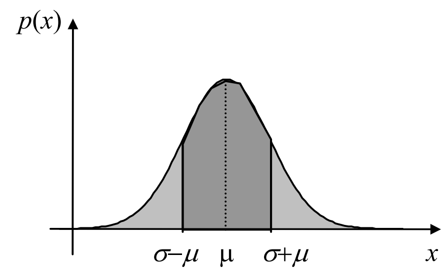
$$\varepsilon = \frac{\delta}{\bar{x}}$$

**Quadrado do desvio padrão experimental**

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

## Distribuição Gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$




*Intervalos de confiança e correspondente nível de confiança para a distribuição normal.*

| **±x** | $\pm 0{,}6745\sigma$ | $\pm 1{,}0\sigma$ | $\pm 1{,}960\sigma$ | $\pm 2{,}0\sigma$ | $\pm 2{,}576\sigma$ | $\pm 3{,}0\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **% da área total** | 50,0 | 68,3 | 95,0 | 95,5 | 99,0 | 99,7 |

# Incerteza da medição

A incerteza do resultado de uma medição, deve ser agrupada em duas categorias, de acordo com o método utilizado para estimar os seus valores numéricos:

**Tipo A -** incertezas que são avaliadas por métodos estatísticos
**Tipo B -** incertezas que são avaliadas por métodos não estatísticos

Frequentemente uma grandeza de saída, a mensuranda $Y$, não é medida directamente, sendo determinada a partir de $n$ outras grandezas de entrada $X_1$, $X_2$, …, $X_n$, através de uma relação funcional

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots , X_n)$$

As grandezas $X_i$ são sujeitas a correcções (ou factores de correcção). É necessário também ter em consideração outras fontes de variabilidade, tais como diferentes observadores, instrumentos, amostras, laboratórios e diferentes instantes em que as observações foram tomadas. Assim, esta equação de medição não deve ser considerada como a expressão de uma lei física. É sim uma expressão de um processo de medição devendo, consequentemente, explicitar todas as incertezas que de uma forma significativa contribuíram para o resultado da medição. Designando por $y$ uma estimativa de $Y$, e $x_i$ uma estimativa de $X_i$, temos

$$y = f(x_1, x_2, \ldots , x_n)$$

# Incerteza da medição

## Determinação das componentes da incerteza

Como exemplo de uma **avaliação do tipo A**, considere-se uma grandeza $X_i$, cujo valor é estimado a partir de $N$ observações independentes $X_{ik}$ de $X_i$, obtidas nas mesmas condições de medição. **A melhor estimativa**, $x_i$, deste conjunto de observações é a média da amostra representada por

$$x_i = \overline{X_i} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{ik}$$

**A incerteza-padrão $u(x_i)$,** a ser associada a $x_i$, é a estimativa do desvio-padrão da média, ou

$$u(x_i) = s(\overline{X_i}) = \frac{s(X_{ik})}{\sqrt{N}} = \left(\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(X_{ik}-\overline{X_i})^2\right)^{1/2}$$

Uma **avaliação do tipo B** da incerteza-padrão é baseada na informação relevante e disponível, que inclui:

- Os dados de medições anteriores.
- A experiência com, ou conhecimento de, comportamentos e propriedades de materiais e instrumentos relevantes.
- As especificações dos fabricantes.
- Os dados fornecidos em operações de calibração e em relatórios técnicos.
- Outras incertezas atribuídas a dados de referência provenientes de manuais.

Uma incerteza é especificada para um dado nível de confiança (90 %, 95 % ou 99 %). A não ser que se mencione explicitamente que foi usado outro tipo de distribuição para calcular a incerteza, admite-se que se recorreu a uma distribuição normal. Para esta distribuição, os factores correspondentes a estes três níveis de confiança são 1,64, 1,96 e 2,58, respectivamente.

# Incerteza da medição

**Exemplo**

Um relatório de calibração especifica que uma tensão padrão $V_p$ de valor nominal 1,02 V é igual a 1,018582 V ± 156 μV à temperatura de 20 ºC. A incerteza de 156 μV foi definida para um nível de confiança de 95 %. Determine a incerteza-padrão e a variância-padrão.

**Resolução**

A incerteza-padrão é $u(V_p) = \dfrac{156}{1{,}96} = 80\ \mu\text{V}.$

A variância-padrão é o quadrado da incerteza-padrão, isto é $u^2(V_p) = 6{,}4\times10^{-9}\ \text{V}^2$

---

**Lei da propagação da incerteza**

Quando estamos perante uma grandeza $y$ dependente, através de uma relação funcional $f$, de $n$ outras grandezas $x_1, x_2, \ldots,$ $x_n$, cada uma das quais medida com uma determinada incerteza-padrão, a incerteza global, designada por incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, é dada por

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)$$

com

$\partial f/\partial x_i$ - coeficiente de sensibilidade

$u(x_i)$ - a incerteza-padrão associada à estimativa $x_i$

$u(x_i, x_j)$ - a covariância estimada, dada por $u(x_i, x_j) = \text{cov}(x_i, x_j) = \dfrac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(X_{ik} - \bar{X}_i)\ (X_{jk} - \bar{X}_j)$

# Incerteza da medição

**Exemplo**

Considere a seguinte equação de medição $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$. A grandeza $X_1$ apresenta um desvio-padrão experimental igual a 0,2. A grandeza $X_2$ está, com um nível de confiança de 68 %, no intervalo [−0,05; 0,05]. A grandeza $X_3$ está, com um nível de confiança de 95 %, no intervalo [−0,4; 0,4]. As estimativas de $X_i$ (para $i$=1, 2, 3) apresentam os valores: $x_1$ = 1,34; $x_2$ = 0,25; $x_3$ = 1,75. $X_i$ apresenta uma distribuição normal, não existindo correlação entre as grandezas $X_i$. $a_i$ são os coeficientes de sensibilidade de valor $a_1$ = 1,0; $a_2$ = 1,2; $a_3$ = 0,5. Determine uma estimativa de $Y$ e o respectivo intervalo de confiança.

**Resolução**

Uma estimativa de $Y$ é dada por

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Não existindo correlação entre as grandezas, a equação *)* tem a expressão

$$u_c^2(y) = a_1^2u^2(x_1) + a_2^2u^2(x_2) + a_3^2u^2(x_3)$$

com

| | |
|---|---|
| $u(x_1) = 0{,}2$ | (a incerteza é estimada pelo próprio desvio-padrão) |
| $u(x_2) = 0{,}05$ | (a incerteza é estimada por metade da amplitude do intervalo dividido pelo factor multiplicativo correspondente ao nível de confiança; neste caso, para o nível de 68 % o factor é igual a 1) |
| $u(x_3) = 0{,}4/1{,}96$ | (a incerteza é estimada por metade da amplitude do intervalo dividido pelo factor multiplicativo correspondente ao nível de confiança; neste caso, para o nível de 95 %, o factor é igual a 1,96) |

Obtém-se assim $y = 2{,}515$ $u_c^2(y) = 0{,}0540$ ou $u_c(y) = 0{,}232$

Finalmente, o intervalo de confiança é [2,515–0,232; 2,515+0,232]

# Incerteza da medição

Para covariância nula, o quadrado da incerteza-padrão combinada passa a ter a expressão

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

ou

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left[ c_i\, u(x_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2(y)$$

Com $u_i(y) \equiv |c_i|\, u(x_i)$

e a sensibilidade $c_i$, dada por $c_i = \partial f / \partial x_i$

O grau de correlação entre $x_i$ e $x_j$ é caracterizado pelo coeficiente de correlação, estimado pela expressão

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)\, u(x_j)} = \frac{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}{s(x_i)\, s(x_j)}$$

donde resulta a expressão

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)$$

Obtida a incerteza-padrão combinada, o intervalo de incerteza do resultado da medição fica caracterizado por $u_c(y)$. Se a distribuição dos resultados for aproximadamente normal e $u_c(y)$ for uma estimativa fiável do desvio-padrão de $y$, então o intervalo $[y - u_c(y);\ y + u_c(y)]$ contem aproximadamente 68 % dos valores atribuíveis à grandeza $Y$, de que $y$ é uma estimativa.

# Incerteza da medição

## Incerteza de medição expandida e factor de expansão

Apesar de $u_c(y)$ ser universalmente usada para expressar a incerteza de um resultado de medição, em algumas aplicações (como nas áreas da saúde ou da segurança) é necessário dispor de uma medida de incerteza que englobe uma fracção apreciável dos valores que são atribuíveis à mensuranda. É usada a incerteza expandida, $U$, que é igual à incerteza-padrão combinada, $u_c(y)$, multiplicada por um factor de expansão $k$, isto é

$$\boldsymbol{U = k\, u_c(y)}$$

Assim, com um determinado nível de confiança, $Y$ assume um valor no intervalo $Y = y \pm U$. Tipicamente, $k$ assume os valores de 2 ou 3, a que correspondem níveis de confiança de 95,5 % e 99,7 %, respectivamente. Nos casos em que uma distribuição normal possa ser atribuída a uma mensuranda e a incerteza-padrão associada à estimativa da grandeza de saída tenha suficiente fiabilidade, deve optar-se pelo factor de expansão $k = 2$. Os exemplos seguintes referem a forma como deve ser especificada a incerteza, para uma tensão padrão, $V_s = 10$ V.

**Exemplo 1:** **$V_s$ = 10,03256 V com uma incerteza combinada igual a $u_c$ = 0,28 mV**. Admitindo que os valores estimados da grandeza apresentam uma distribuição normal, com um desvio-padrão estimado $u_c$, o valor desconhecido do padrão estará, com um nível de confiança aproximado de 68 %, no intervalo $V_s \pm u_c$.

**Exemplo 2:** **$V_s$ = (10,03256 ± 0,00056) V** em que o número a seguir ao símbolo ± é o valor numérico da incerteza expandida $U = k\, u_c$, sendo $U$ calculada a partir da incerteza-padrão combinada $u_c$ = 0,28 mV e um factor de expansão $k$=2. Admitindo uma distribuição normal, o valor desconhecido do padrão está, com um nível de confiança aproximado de 95,5 %, no intervalo $V_s \pm U$.

# Incerteza da medição

## A incerteza na realidade laboratorial

Uma tabela de incertezas, como a representada na tabela seguinte, permite, para além duma identificação geral, indicar todos os tipos de incerteza bem como os parâmetros necessários para o cálculo da incerteza expandida. A tabela contém três zonas principais:

**Identificação**, com informação relevante quanto à grandeza a caracterizar, com identificação do principal equipamento usado bem como um título genérico do relatório, o nome do autor do relatório e a data de realização.

**Incertezas-padrão individuais**, onde se identifica a incerteza, e se dão todos os valores importantes que permitam determinar a incerteza-padrão, ou a sua variância. Nesta tabela são considerados os seguintes parâmetros:

(1) incerteza especificada, $u(x_i)$;

(2) coeficiente de sensibilidade, $c_i$;

(3) tipo de distribuição considerada, *dist* (Gaussiana, rectangular ou triangular);

(4) coeficiente calculado (ou retirado da distribuição) para o intervalo de confiança especificado, $k_i$.

(5) e (6) referem-se à incerteza-padrão referida à saída $u_i(y)$, e a correspondente variância padrão $u_i^2(y)$, determinadas a partir das colunas anteriores.

**Resultados**, onde se tabelam os valores totais das incertezas e variâncias combinadas e finalmente se apresenta a incerteza expandida.

# Incerteza da medição

## A incerteza na realidade laboratorial. Tabela de incertezas

| Identificação | | Incerteza | *Inc.* (1) | $c_i$ (2) | *Dist.* (3) | $k_i$ (4) | $u_i(y)$ (5) | $u_i^2(y)$ (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nome: | **Tipo A** | | $u(x_1)$ | $c_1$ | | $k_1$ | $u_1(y)$ | $u_1^2(y)$ |
| Grandeza: | | | $u(x_2)$ | $c_2$ | | $k_2$ | $u_2(y)$ | $u_2^2(y)$ |
| Valor Nominal: | | | ... | ... | | ... | ... | ... |
| Equip. primário: | **Tipo B** | | ... | ... | | ... | ... | ... |
| Equip. auxiliar: | | | ... | ... | | ... | ... | ... |
| Metrologista: | | | ... | ... | | ... | ... | ... |
| Data: | | | $u(x_n)$ | $c_n$ | | $k_n$ | $u_n(y)$ | $u_n^2(y)$ |

| | |
|---|---|
| Factor de expansão: | $k$ |

$$u_i(y) = \frac{c_i\, u(x_i)}{k_i}$$

| **Resultados:** | Tipo A | Tipo B | Tipo AB | Incerteza expandida |
|---|---|---|---|---|
| Incerteza-padrão | $u_{cA}(y)=\left[\sum_{\text{TipoA}} u_i^2(y)\right]^{1/2}$ | $u_{cB}(y)=\left[\sum_{\text{TipoB}} u_i^2(y)\right]^{1/2}$ | $u_c(y)=\left[u_{cA}^2(y)+u_{cB}^2(y)\right]^{1/2}$ | $\boxed{U = k\, u_c(y)}$ |
| Variância padrão | $u_{cA}^2(y)=\sum_{\text{TipoA}} u_i^2(y)$ | $u_{cB}^2(y)=\sum_{\text{TipoB}} u_i^2(y)$ | $u_c^2(y)=u_{cA}^2(y)+u_{cB}^2(y)$ | |